**Тригонометрические уравнения в вариантах ЕГЭ профильного уровня**

«Мне приходится делить свое время между политикой и уравнениями. Однако, уравнение, по-моему, гораздо важнее, потому что политика существует только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно"

А. Эйнштейн

Тригонометрические уравнения – тема экзамена по математике профильного уровня, это задание 13 второй части, которое требует развернутого решения. Считается, что для успешного решения тригонометрических уравнений нужно хорошо знать тригонометрические формулы, а этих формул достаточно много (основных и дополнительных), нужно знать стандартные формулы корней простейших тригонометрических уравнений, но главное всё-таки, не зубрить все эти сложные формулы, а с помощью здравых рассуждений нарисовать картинку в тетради и получить с помощью тригонометрической окружности упрощенные формулы для корней уравнений.

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций. Любое тригонометрическое уравнение можно свести к одному или нескольким простейшим, таким как . И уже на этом этапе нам поможет тригонометрический круг. Напомню, что – это абсцисса точки на единичной окружности, а – это ордината точки на единичной окружности, соответствующие углу *х*. Следовательно, и синус, и косинус не могут быть больше единицы и меньше -1. Уравнения имеют решения только при условии . Ось тангенсов – это касательная к единичной окружности, проходящая через точку (1;0) параллельно оси ординат. Ось котангенсов – это касательная к единичной окружности, проходящая через точку (0;1) параллельно оси абсцисс.

Вспомним общие правила решения уравнений:

1) всегда начинаем с области допустимых значений уравнения: если в уравнении есть дроби, корни, логарифмы, арксинусы или арккосинусы, сразу же записываем ОДЗ, а когда нашли корни, проверяем, входят ли они в эту область или нет; а если в уравнении есть tg *x* – помним, что он существует, только если , если в уравнении есть ctg *x* – помним, что он существует, если .

2) если в уравнении можно сделать замену переменной – нужно это делать;

3) решение уравнения оформляют в виде цепочки равносильных переходов, при этом в экзаменационной работе лучше письменно комментировать переходы, записывая при этом формулы, которые использовали в данном преобразовании;

4) решив уравнение, необходимо выполнить проверку и убедиться, что полученные ответы являются корнями уравнения.

И прежде, чем приступать к решению тригонометрических уравнений, нужно проверить свои знания, помните ли вы определения синуса и косинуса для произвольного угла, формулы синуса и косинуса двойных углов, синусов и косинусов суммы и разности (хотя эти формулы будут на экзамене в справочных материалах для профильного уровня), формулы понижения степени, которых не будет в справочных материалах? А вот формулы приведения учить наизусть не надо, надо только знать, как они получаются. Для этого существует мнемоническое правило (мнемоникой называют набор различных приёмов и правил, с помощью которого в мозге создаются устойчивые ассоциации) – достаточно задать себе два вопроса:

1) Меняется ли функция на кофункцию? (Если в формуле присутствуют углы и , то есть углы вертикальной оси, киваем головой по вертикали и отвечаем: «Да», если же присутствуют углы горизонтальной оси π или 2π, то киваем головой по горизонтали и получаем ответ: «Нет».

2) Какой знак надо поставить в правой части формулы? (Знак определяем по левой части, смотрим, в какую четверть попадает угол, и вспоминаем, какой знак в этой четверти имеет функция, стоящая в левой части).

Также для решения тригонометрических уравнений необходимо знать наизусть значения основных тригонометрических функций, так как на экзамене профильного уровня в справочных материалах этого не будет. Запомнить надо следующее:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) ;

4) если , то ;

5) если , то ;

6) .

Но что делать, например, с уравнением? У этого уравнения есть решения, вспомним, как их записать. Отметим на тригонометрическом круге точки, абсцисса которых равна , точка с абсциссой – это *arccos*, она соответствует углам и .

Для того, чтобы записать решения тригонометрических уравнений, мы воспользовались обратными тригонометрическими функциями:

1) арксинус числа *а* – это число , такое, что ;

2) арккосинус числа *а* – это число , такое, что ;

3) арктангенс числа *а* – это число , такое, что ;

4) арккотангенс числа *а* –это число , такое, что .

Вспомним основные методы решения тригонометрических уравнений и их главные особенности:

1) замена переменной и сведение к квадратному уравнению - этот способ универсальный, применяется в любых уравнениях, но замена не всегда видна сразу, и уравнение нужно сначала преобразовать;

2) разложение на множители – применяется, если уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль (произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, следовательно, сложное уравнение распадается в совокупность более простых;

3) однородные уравнения – это такие уравнения, в которых степени всех слагаемых одинаковые, точно так же, как в обычном многочлене (степень одночлена — это сумма степеней входящих в него сомножителей), для однородных уравнений существует стандартный приём решения — деление обеих его частей на тригонометрическую функцию в степени слагаемых уравнения, но возможность этого деления должна быть обоснована и данное обоснование необходимо прописать при решении: «предположим, что , тогда в силу уравнения и , что противоречит основному тригонометрическому тождеству, следовательно, любое решение данного уравнения удовлетворяет условию …, и мы можем поделить обе его части на …, в результате деления приходим к равносильному квадратному уравнению …»;

4) введение дополнительного угла - этот метод применяется для уравнений вида , когда числа *a* и *b* являются значениями синуса и косинуса углов в ;

5) универсальная подстановка – пусть , , , эти формулы позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла, но эти формулы не определены при , поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить;

6) метод оценок – в некоторых уравнениях на помощь приходят оценки и .

Так как каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение имеет бесчисленное множество решений. Это мы показываем с помощью периода: синус и косинус имеют период , тангенс и котангенс имеют период .

Но в 13 задании профильного уровня имеется пункт б), в котором требуется отобрать корни, принадлежащие определенному промежутку. Поэтому в таких заданиях мы делаем два рисунка: первый – когда решаем уравнение, второй – когда отбираем корни на заданном отрезке или интервале.

Какой способ отбора корней выбрать: с помощью тригонометрической окружности или с помощью двойного неравенства? У каждого способа есть свои «плюсы» и «минусы». Тригонометрическая окружность - наглядный способ, трудно сделать ошибку, если интервал меньше, чем . Но если интервал больше, чем , удобнее отбирать корни с помощью двойного неравенства. Например, надо найти корни из серии на отрезке . Это более 10 кругов. Конечно, здесь лучше решить двойное неравенство.

Решение тригонометрических уравнений – ключевая тема в математике, важная для других дисциплин.