**Вероятности дискретных случайных событий. Схема Лапласа. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятностей.**

Все события в мире можно условно разделить на две большие группы: про одни мы можем определенное сказать, что оно произойдет или нет в данных условиях (например, стекло разобьется, если по нему ударить молотком; желтая краска сменит цвет на зеленый. если ее смешать с синей и т.д.). Такие события и закономерности их появления изучаются естественными науками - физикой, химией, биологией. Про другие события мы не можем с определенностью сказать, произойдут ли они в данных условиях. Например, бросая монету на стол, мы не можем знать, упадет она орлом вверх или решкой; перед началом матча по футболу, мы не можем определенно сказать, каков будет разрыв в счете. Такие ***события, наступление или ненаступление которых нельзя предугадать,*** называют ***случайными*** изакономерностями их появления занимается ***теория вероятностей.***

Случайные события являются результатом некоторого ***случайного опыта (эксперимента, испытания).***

Все результаты эксперимента (опыта) называют **элементарными событиями, или исходами**.

Например, эксперимент заключается в разыгрывании шахматной партии. Выигрыш, ничья, проигрыш – его возможные исходы.

Если эксперимент заключается в наблюдении того, какой стороной упадет подброшенная монета на стол, то исходами этого опыта могут быть два элементарных события: решка или орел.

Если эксперимент заключается в наблюдении того, какая грань окажется наверху при подбрасывании игрального кубика, то результатами этого опыта могут быть шесть различных элементарных событий (исходов): выпало 1 очко, 2 очка, 3 очка, 4 очка, 5 очка, 6 очков.

Классическая схема — это случайный эксперимент с конечным числом равновозможных элементарных исходов.

В приведенных примерах с монетой и кубиком исходы **равновероятны (равновозможны)**. Понятие равновозможности - интуитивное, основанное на опыте практического использования предметов. Весь наш опыт говорит о том, что шансы на воплощение любого из возможных исходов одинаковы.

Например, шанс на выпадение орла - один из двух, шанс на выпадение 3-х очков на верхней грани кубика - один из шести.

Но недоверчивые могут провести этот эксперимент «вживую»:

1. Подбрасывайте монету и отмечайте, что выпало - орел или решка. Заполните **таблицу частот и относительных частот** каждого исхода.

Справка: в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провел 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего   наблюдал   появление   орла   2048   раз

1. Подбрасывайте кубик и отмечайте, сколько очков выпало. Заполните **таблицу частот и относительных частот** каждого исхода.

Если вы выполнили эксперимент достаточно много раз, то имеет смысл посчитать **частоту** выпадения орла. Допустим, при 100 испытаниях орел выпал 48 раз (48 раз из 100), тогда **относительная частота** выпадения орла равна 

А если вы 100 раз подбросили кубик и у вас 3 очка выпало 16 раз (16 раз из 100), то относительная частота выпадения трех очков будет равна 

Видим, что опыты подтверждают наши интуитивные представления.

Вероятность – это и есть шанс получить желаемое в данном опыте, выраженный числом.

Обратим внимание, что это число неотрицательное и не может быть больше 1 (мы не можем получить больше, чем есть).

Но «желаемым» может быть не только элементарный исход, но и более сложное событие, тоже являющееся результатом эксперимента.

Например, пусть событие А заключается в том, что при бросании кубика выпало четное число очков. В этом случае принято говорить об ***элементарных исходах,*** ***благоприятствующих событию* А**: выпало 2, 4 или 6 очков. Таких исходов 3. Таким образом, наши шансы «получить желаемое», т.е. четное число очков из шести равновозможных, уже 3 из 6.

**Классическое определение вероятности**:

, где А - событие, вероятность которого определяется, n - число всех равновозможных исходов опыта, а m = число исходов, благоприятствующих событию А.

Мы можем сформулировать событие, которое при данных условиях произойдет всегда. Например, при подбрасывании кубика событие В={число очков меньше 7 }. Тогда

Такое случайное событие, которые при данных условиях обязательно произойдет, называется ***достоверным*** и его вероятность равна 1.

А можно сформулировать событие, которое в данном эксперименте точно не произойдет. Например, при подбрасывании кубика событие С={число очков больше 7}, . Такое событие называют ***невозможным*** и его вероятность равна 0.



Теперь можно утверждать, что 

**Примеры задач.**

1.У бабушки 20 чашек, из них 5 – с синими цветами, остальные с красными. Найдите вероятность того, что случайно выбранная чашка будет а) с синими цветами; б) с красными цветами.

2. Монету подбросили два раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпадет орел.

3. Подбросили игральный кубик. Найдите вероятность того, что выпало меньше 5.

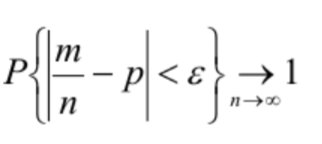
4. Кубик подбросили два раза. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 3.

В классической схеме мы умозрительно оценивали вероятность событий, исходя из равновозможности исходов. Но если практический опыт нам не говорит ничего о шансах на наступление события, то на помощь приходит статистика.

В демографии хорошо известно число 0, 514. Оно выражает долю мальчиков в общем числе новорожденных. Одним из первых ученых, который обратил внимание на эту закономерность, был немецкий естествоиспытатель А. Гумбольд (1769-1859). Он высказал предположение, что это явление можно рассматривать как общий закон человечества. Причем Гумбольд установил, что это отношение равно 22/21, т.е. на 22 мальчика приходится 21 девочка. По результатам этих статистических исследований можно считать, что вероятность рождения мальчика равна 0, 514.

Правомерность такого «опытного» подхода к определению вероятности следует из ряда теорем, которые выражают **Закон больших чисел.** Закон больших чисел был многократно сформулирован в разное время. Одно из первых и самых простых его выражений принадлежит учёному из Швейцарии Якобу Бернулли. Именно он дал ясное определение давно наблюдаемой на практике закономерности. В ней доказывается, что при неограниченно большом количестве экспериментов частота проявления определенного события оказывается равной вероятности его появления в отдельном испытании.

**Теорема Бернулли\*.** При неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов частота события будет сколь угодно мало отличаться от вероятности события в отдельном опыте. Иначе, вероятность того, что отклонение относительной частоты .



Если в результате достаточно большого числа испытаний установлено, что относительная частота случайного события А (m/n) приближается к некоторой величине, то эту величину **в силу закона больших чисел,** принимают за численное значение вероятности данного события Р(А).

Число, возле которого колеблется частота появления события А при неограниченном увеличении числа опытов и сохранении тех же условий, называется ***статистической вероятностью*** события А.

Пример. В теории вероятностей очень популярны задачи про стрелка, который стреляет по мишени, в них приводятся различные значения вероятностей поражения мишени при одном выстреле. Откуда же берутся эти значения, ведь очевидно, что исходы - «попал» и «промахнулся» не равновозможны и различны для разных людей?

Проведем опыт - отправимся в тир и будем стрелять по мишени, записывая результаты испытаний. Например, в результате 100 выстрелов было 37 попаданий и 63 промаха, т.е. относительная частота попаданий равна 0,37. Это число и можно взять за вероятность попадания при однократном выстреле (это если не учитывать «пристрелку», приобретение навыка и т.д.).

**Геометрическое определение вероятности.**

На практике часто встречаются такие испытания (опыты, эксперименты), число исходов которых бесконечно и которые могут выражаться любым числом из некоторого промежутка. Тогда применить классическое или статистическое определение вероятности невозможно именно в силу бесконечного числа исходов.

Пример. Если испытание состоит в определении времени, когда сигнальщик примет световой сигнал, то его возможными исходами можно считать появление сигнала в любой момент времени в пределах заданного промежутка.

Если испытание состоит в определении точки разрыва линии связи длиной 2 км вражеским лазутчиком, то возможными исходами этого испытания можно считать разрыв линии связи в любой точки этого 2-километрового отрезка. Множество исходов таких опытов бесконечно и сосчитать их нельзя. Но их можно проиллюстрировать геометрически.

Пусть в результате опыта наудачу выбирается точка в области G. Требуется найти вероятность того, что эта точка окажется в области g, являющейся частью области G.

Введем допущение, что исходы испытания распределены равномерно. Это значит, что вероятность попадания наудачу выбранной точки из области G в какую-либо часть g ее области пропорциональны величине этой области и не зависит от ее расположения и формы.

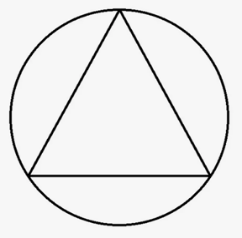
Под величиной области понимаем длину, площадь или объем, в зависимости от размерности фигуры G.

Пример. Абонент ждет вызова с двух до трех часов. Какова вероятность того, что этот вызов произойдет с 2 ч 30 мин до 2 ч 40 мин.

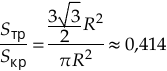
2:00                                                        3:00



А                      В        С                   D

Р(E)=

Пример. В круг, радиус которого равен R, вписан правильный треугольник. Наудачу в этот руг падает точка. Какова вероятность, что она попадет в область треугольника?

Р(E)=

**Геометрической вероятностью в этом случае понимают отношение величины области g к величине области G:**



**Примеры задач.**

1.Вася хочет позвонить другу. Проблема в 4-х последних цифрах номера телефона. Он помнит только, что это 1, 2, 5, 6, но порядок забыл. Какова вероятность, что Вася с первой попытки дозвонится другу?

2. На подъезде установлен кодовый замок с десятью кнопками-цифрами. Код состоит из 4 цифр, которые набираются в определенном порядке. Какова вероятность того, что при случайном наборе дверь откроется?

3. На отдел в некоторой фирме выделили к новогодним праздникам разные подарки. Среди них 4 билета на новогодний концерт. Всего в отделе 8 человек. Подарки распределяются жеребьевкой. Какова вероятность, что четверо друзей – Саша, Миша, Катя и Оля – смогут вместе сходить на концерт?

4. В студии танцев занимаются 8 девочек и 5 мальчиков. Для участия в конкурсе нужно выбрать 2 мальчиков и 2 девочек. Какова вероятность того, что в конкурсе будут участовать Петя, Вася, Оля и Маша (у всех детей имена различны)?

5. Из прямоугольника случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность события: «точка принадлежит ромбу, вершинами которого служат середины сторон прямоугольника».

6. Отрезок АВ разбит точками С и D на три равные части: АС, СD, DB. Из отрезка АВ выбирают случайную точку Х. Найдите вероятность того, что точка Х принадлежит отрезку СD.

7. На окружности с центром О выбрана точка А. Из этой окружности случайным образом выбирают точку Х. Найдите вероятность того, что угол АОХ находится в пределах от 30º до 60º.

8. Вася обещал позвонить Пете между 15:00 и 16:00. Вася всегда держит слово. Петя ждал звонка, но около половины четвертого отлучился на 10 минут, забыв взять с собой телефон. Найдите вероятность того, что, когда Вася позвонил, Петя был у телефона.

**Библиографический список**

1. Вероятность и статистика. 7-9 классы. Учебник в 2-х частях - Высоцкий И.Р., Ященко И.В, Москва, «Просвещение»,2023
2. Основы статистики и вероятность. 5-11 классы. Пособие для общеобразовательных учреждений. Москва. «Дрофа» 2008.

URL:<https://www.mathedu.ru/text/bunimovich_bulychev_osnovy_statistiki_i_veroyatnost_5-11_2008/p1/>

1. Вероятность и статистика. 10 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровни. – Бунимович Е.А., Булычев В.А. Учебник. Москва. «Просвещение» 2024
2. Вероятность и статистика. 11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровни. – Бунимович Е.А., Булычев В.А. Учебник. Москва. «Просвещение» 2024
3. Вероятность и статистика. 10-11 классы. Базовый и углубленный уровни. – Бунимович Е.А., Булычев В.А. Методическое пособие для учителя. Москва. «Просвещение» 2024
4. В.С.Лютикас. Теория вероятностей. Учебное пособие для 9-11 классов средней школы. Москва. Просвещение. 1990.

URL:<https://www.mathedu.ru/text/lyutikas_fakultativnyy_kurs_po_teorii_veroyatnostey_1990/p1/>