

Метод рационализации при решении логарифмических неравенств

Учитель математики и физики:
Вакулюк Татьяна Владимировна

Москва 2025 г.

Цель вебинара - предложить метод решения сложных неравенств, который позволяет перейти от неравенства, содержащего логарифмические функции, к равносильному ему, более простому рациональному неравенству.



Суть метода рационализации (декомпозиции) заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Где **V** – один из знаков **<, >, ≤, ≥**

$\log_a f \vee \log_a g$	$(a - 1)(f - g) \vee 0$
$(\log_a f - \log_a g) \cdot h \vee 0$	$(f - g) \cdot h \vee 0$
$\log_f a \vee \log_g a$	$(f - 1)(g - 1)(a - 1)(g - f) \vee 0$
$\log_h f \cdot \log_p q \vee 0$	$(h - 1)(f - 1)(p - 1)(q - 1) \vee 0$
$\frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a p - \log_a q} \vee 0$	$\frac{f - g}{p - q} \vee 0$

- Свойства степени и показательные функции
- Свойства логарифмов
- Решение показательных уравнений и показательных неравенств
- Решение логарифмических уравнений и логарифмических неравенств
- Метод замены переменной
- Метод интервалов

Для начала давайте посмотрим на простое неравенство и проанализируем способы его решения:

$$\text{Log}_x (2x^2 - 8) - \text{Log}_x \left(\frac{5}{x}\right) > 0$$

**Первый случай:
основание $x > 1$**

$$2x^2 - 8 > \frac{5}{x}$$

**Второй случай:
основание $0 < x < 1$**

$$2x^2 - 8 < \frac{5}{x}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 8 > \frac{5}{x} \\ 2x^2 - 8 > 0 \\ \frac{5}{x} > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

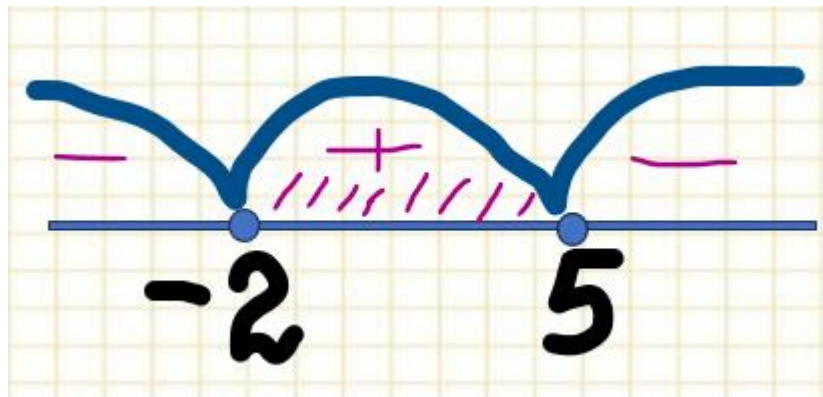
ИЛИ

$$\begin{cases} 2x^2 - 8 < \frac{5}{x} \\ 2x^2 - 8 > 0 \\ \frac{5}{x} > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

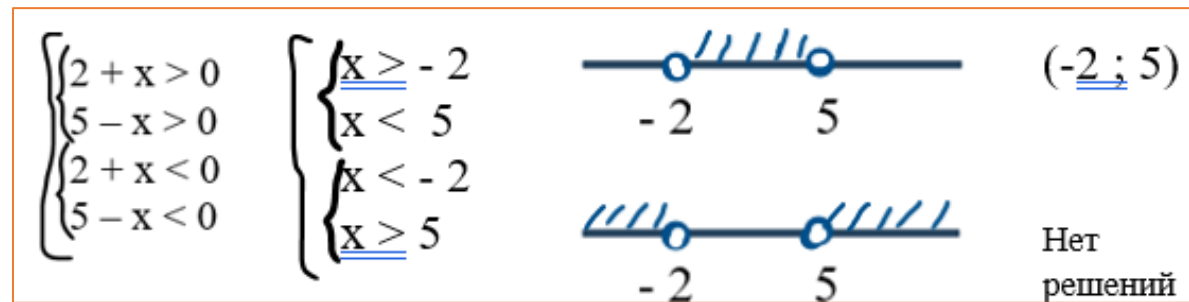
Опорная задача №1

Решите неравенство: $(2 + x)(5 - x) > 0$

Метод интервалов



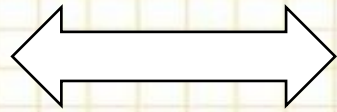
Второй способ решения:



Ответ: $(-2; 5)$

Опорная задача №2

$$\begin{cases} 3 + 2x > 0 \\ 4 - 3x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 + 2x < 0 \\ 4 - 3x < 0 \end{cases}$$



$$(3 + 2x)(4 - 3x) > 0$$

Метод замены множителей

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g \neq 0$$

$$\text{Log}_a f \neq \text{Log}_a g \iff (a - 1)(f - g) \neq 0$$



$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ f > g \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a < 1 \\ f < g \end{array} \right. \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a - 1 > 0 \\ f - g > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a - 1 < 0 \\ f - g < 0 \end{array} \right. \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a - 1)(f - g) > 0 \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right.$$

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ f < g \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a < 1 \\ f > g \end{array} \right. \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a - 1 > 0 \\ f - g < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a - 1 < 0 \\ f - g > 0 \end{array} \right. \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a - 1)(f - g) < 0 \\ \text{ОДЗ} \end{array} \right.$$

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g \leq 0 \Leftrightarrow (a - 1)(f - g) \leq 0$$

Правило №1. Можно заменять только множители.

1. $\text{Log}_3(2+x) - \text{Log}_3(5-x) + 4 < 0$

2. $\text{Log}_x(x^2 + 4x + 3) \geq 0$

3. $\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) \geq 0$

$$\text{№1. } \log_3(2+x) - \log_3(5-x) + 4 < 0$$

$$\log_3(2+x) - \log_3(5-x) + 4 < 0$$

1-е слагаемое

2-е слагаемое

ВЫВОД: применять такой метод в данном неравенстве **НЕЛЬЗЯ!**



$$\text{Log}_x(x^2 + 4x + 3) \geq 0$$

$$\text{Log}_x(x^2 + 4x + 3) - 0 \geq 0$$

$$\text{Log}_x(x^2 + 4x + 3) - \text{Log}_x 1 \geq 0$$

$$(\text{Log}_x(x^2 + 4x + 3) - \text{Log}_x 1) * 1 \geq 0$$

ВЫВОД: применять такой метод в данном неравенстве **МОЖНО!**



$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) \geq 0$$

$$(\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x)) * 1 \geq 0$$

ВЫВОД: применять такой метод в данном неравенстве **МОЖНО!**

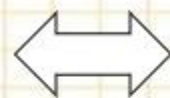


Правило №2: Сравнение должно быть только с нулём.
(т.е. в правой части неравенства должен стоять «0»)

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) \geq 4$$

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g > 0$$

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g < 0$$



$$(a-1)(f-g) > 0$$

$$(a-1)(f-g) < 0$$



Пример: $\text{Log}_{x^2}(2 + x) < 1$

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) < 1$$

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - 1 < 0$$

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}x^2 < 0$$

$$(\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}x^2) * 1 < 0$$

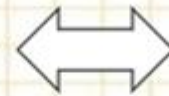
ВЫВОД: теперь можно **применять** метод рационализации!



Правило №3: Применяется только в неравенствах.

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) = 0$$

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g > 0$$



$$(a-1)(f-g) > 0$$

$$\text{Log}_a f - \text{Log}_a g < 0$$

$$(a-1)(f-g) < 0$$

Справедливо только для знаков $<, >, \leq, \geq$



Правило №3: Применяется только в неравенствах.

Суть метода рационализации (декомпозиции) заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Где **V** – один из знаков **<, >, ≤, ≥**

$$\log_a f - \log_a g > 0$$



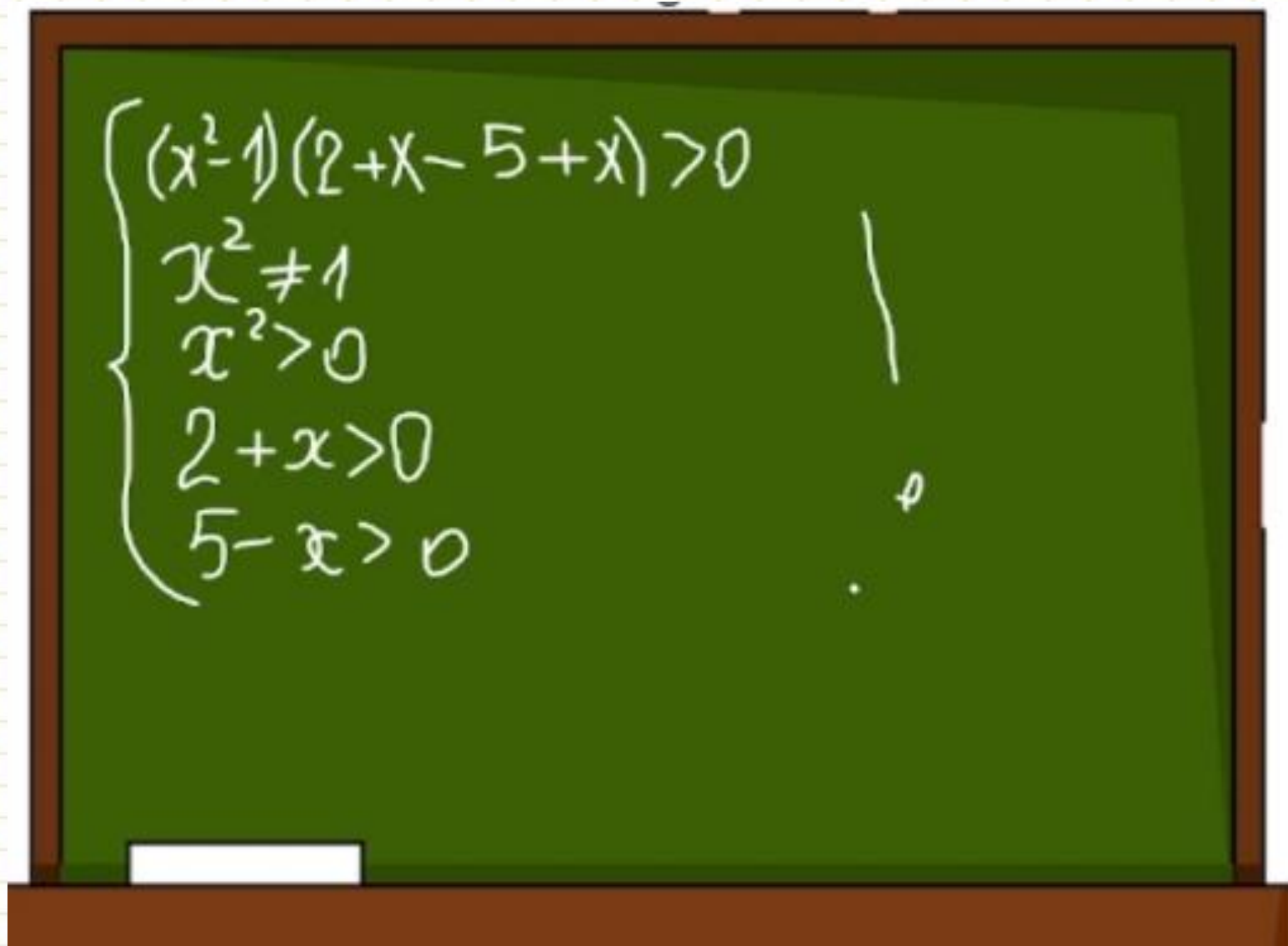
$$(a-1)(f-g) > 0$$

$$\log_a f - \log_a g < 0$$

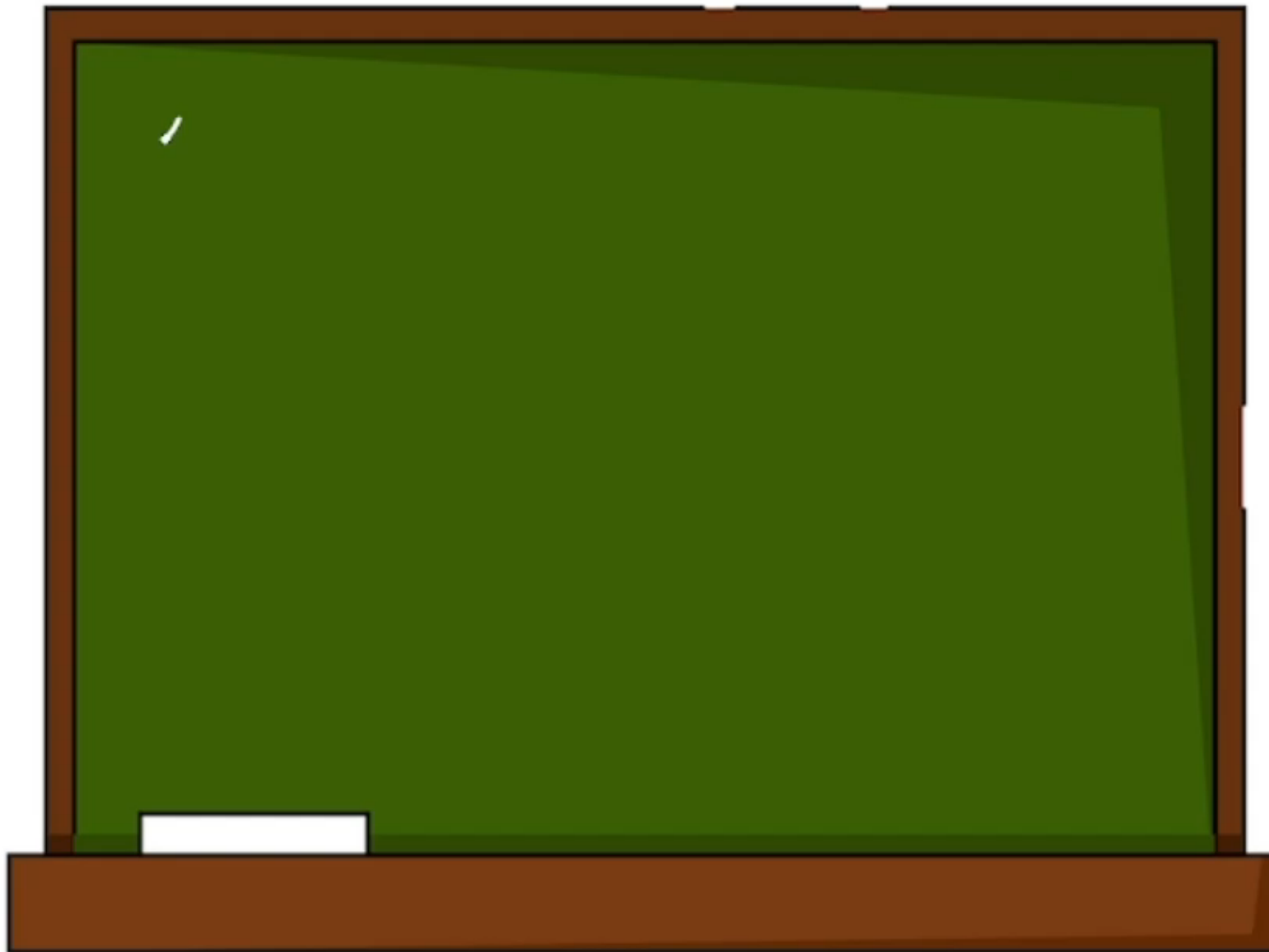
$$(a-1)(f-g) < 0$$

Справедливо только для знаков **<, >, ≤, ≥**

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) > 0$$


$$\begin{cases} (x^2 - 1)(2 + x - 5 + x) > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ x^2 > 0 \\ 2 + x > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) > 0$$



$$\text{Log}_{x^2}(2 + x) - \text{Log}_{x^2}(5 - x) > 0$$

ВЫВОД: в уравнениях нельзя применять метод замены множителей.

Метод замены множителей справедлив только для знаков **<, >, ≤, ≥**



ВОПРОС №1: Как понять, когда можно применять метод рационализации ?



ВОПРОС №2: Как правильно оформлять решение, используя данный метод?



ВОПРОС №3: Что делать, если вместо знака «-» будет знак «+» в неравенствах?



ОЧУ «ОЦ им.С.Н.Олехника»



ВОПРОС №2: Как правильно оформлять решение, используя данный метод?

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) \geq 0$$

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) - 0 \geq 0$$

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) - \text{Log}_{2-x} 1 \geq 0$$

$$(2 - x - 1) (5 + x - 1) \geq 0$$



ВОПРОС №2: Как правильно оформлять решение, используя данный метод?

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) \geq 0$$

Логарифмом числа $v > 0$ по основанию a , где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется показатель степени x , в которую нужно возвести число a , чтобы получить число v .

$$\log_a b = x, a^x = b$$

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) \geq 0$$

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) - 0 \geq 0$$

$$\text{Log}_{2-x} (5 + x) - \text{Log}_{2-x} 1 \geq 0$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (2 - x - 1) (5 + x - 1) \geq 0 \\ 2 - x > 0 \\ 2 - x \neq 1 \\ 5 + x > 0 \end{array} \right.$$



①

$$(2-x)(5+x-1) \geq 0$$

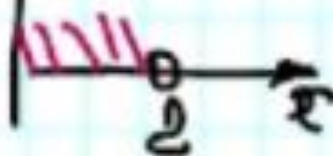
$$(1-x)(4+x) \geq 0$$



②

$$2-x > 0$$

$$x < 2$$



③

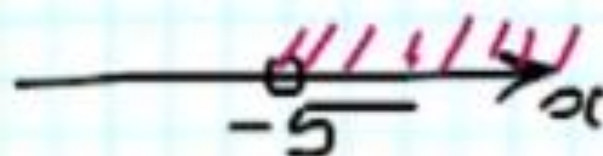
$$2-x \neq 1$$

$$x \neq 1$$

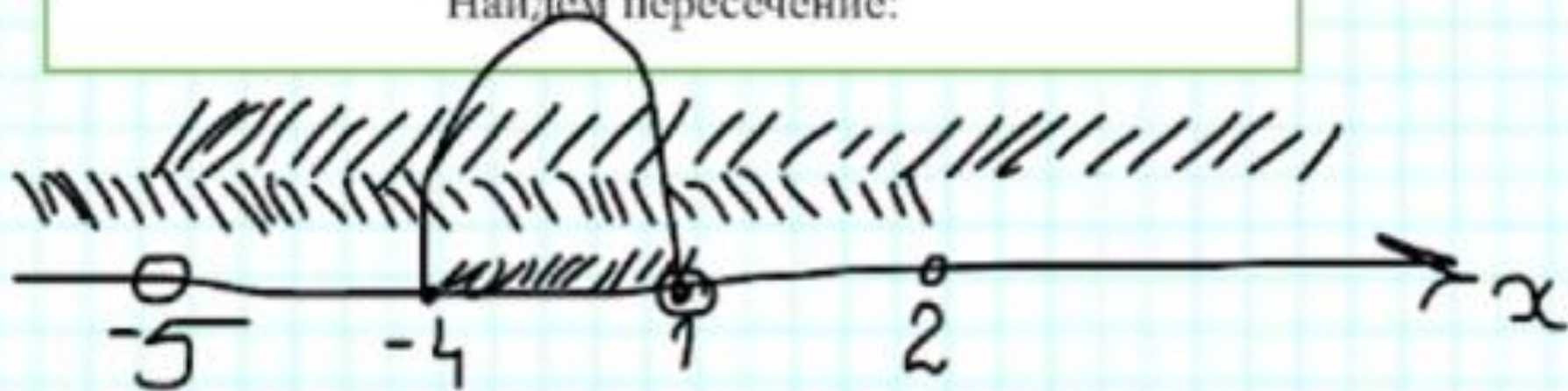
④

$$5+x > 0$$

$$x > -5$$



Найдем пересечение:



ответ: $[-4; 1)$

ВОПРОС №3: Что делать, если вместо знака «-» будет знак «+» в неравенствах?

$$\text{Log}_2(2x + 6) + \text{Log}_2 x > 0$$

$$\text{Log}_2(2x + 6) - (-1) \text{Log}_2 x > 0$$

$$\text{Log}_2(2x + 6) - \text{Log}_2 \frac{1}{x} > 0$$

$$\begin{cases} (2 - 1) (2x + 6 - \frac{1}{x}) > 0 \\ 2x + 6 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$



Задача №1. (Тренировочные варианты ЕГЭ)

$$\text{Log}_{0.25x^2} \left(\frac{X+12}{4} \right) \leq 1$$

$$\text{Log}_{0.25x^2} \left(\frac{X+12}{4} \right) - 1 \leq 0$$

$$\text{Log}_{0.25x^2} \left(\frac{X+12}{4} \right) - \text{Log}_{0.25x^2} 0.25x^2 \leq 0$$

Задача №1.

$$\text{Log}_{0.25x^2} \left(\frac{x+12}{4} \right) \leq 1$$

ДВУ:

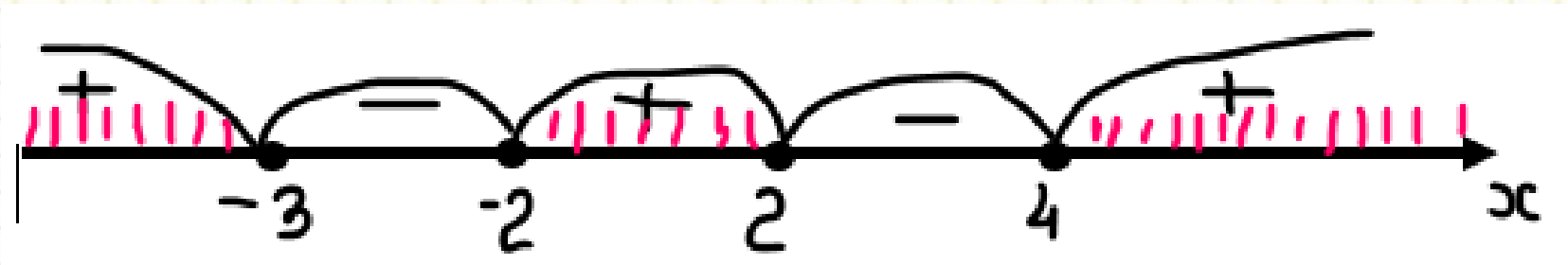
$$\left\{ \begin{array}{l} (0,25 x^2 - 1) \left(\frac{x+12}{4} - 1 \right) \leq 0 \\ 0,25 x^2 > 0 \\ 0,25 x^2 \neq 1 \\ \frac{x+12}{4} > 0 \end{array} \right.$$

$$1) (0,25 x^2 - 1) \left(\frac{x+12}{4} - 1 \right) \leq 0$$

$$(0,5x - 1) (0,5x + 1) (-x^2 + x + 12) \leq 0$$

$$(0,5x - 1) (0,5x + 1) (x^2 - x - 12) \geq 0$$

$$(0,5x - 1) (0,5x + 1) (x - 4) (x + 3) \geq 0$$



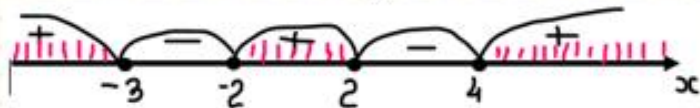
Задача №1.

$$\log_{0.25x^2} \left(\frac{x+12}{4} \right) \leq 1$$

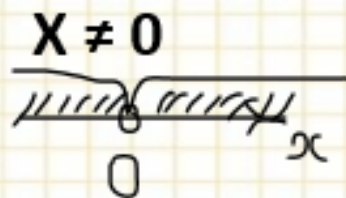
ДВУ:

$$\begin{cases} (0,25x^2 - 1) \left(\frac{x+12}{4} - 1 \right) \leq 0 \\ 0,25x^2 > 0 \\ 0,25x^2 \neq 1 \\ \frac{x+12}{4} > 0 \end{cases}$$

1) $(0,25x^2 - 1) \left(\frac{x+12}{4} - 1 \right) \leq 0$



2) $0,25x^2 > 0$



3) $0,25x^2 \neq 1$

$$0,25x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ и } x \neq -2$$

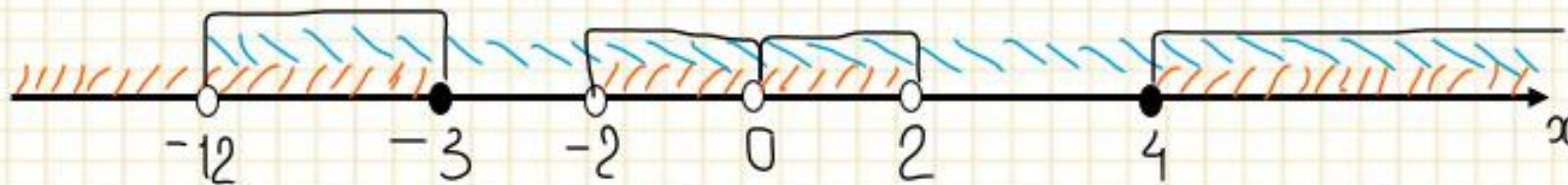
4) $\frac{x+12}{4} > 0 \quad | \cdot 4$

$$x + 12 > 0$$

$$x > -12$$



Найдем пересечение:



Ответ: $(-12 ; -3] \cup (-2 ; 0) \cup (0 ; 2) \cup [4 ; +\infty)$

Задача №2. (ЕГЭ 2020 год)

$$x^2 \text{Log}_{625} (3-x) \leq \text{Log}_5 (x^2-6x+9)$$

$$x^2 \text{Log}_5^4 (3-x) \leq \text{Log}_5 (x-3)^2$$

$$x^2 \text{Log}_5^4 (3-x) \leq \text{Log}_5 (3-x)^2$$

$$x^2 \frac{1}{4} \text{Log}_5 (3-x) \leq 2 \text{Log}_5 (3-x)$$

$$x^2 \frac{1}{4} \text{Log}_5 (3-x) \leq 2 \text{Log}_5 (3-x) | *4$$

$$x^2 \text{Log}_5 (3-x) - 8 \text{Log}_5 (3-x) \leq 0$$

$$\text{Log}_5 (3-x) * (x^2 - 8) \leq 0$$

$$(\text{Log}_5 (3-x) - 0) * (x^2 - 8) \leq 0$$

$$(\text{Log}_5 (3-x) - \text{Log}_5 1) * (x^2 - (2\sqrt{2})^2) \leq 0$$

$$x^2 \frac{1}{4} \text{Log}_5 (3-x) \leq 2 \text{Log}_5 |3-x|$$

С учетом ОДЗ $\text{Log}_5 (3-x)$

$$3-x > 0,$$

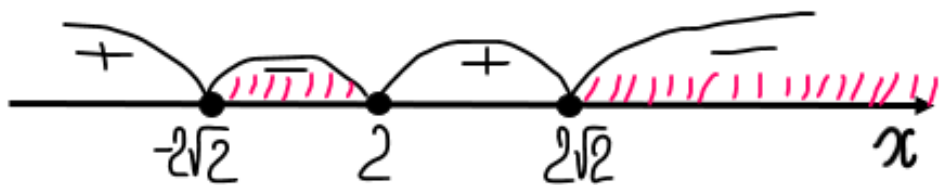
поэтому модуль можно не
ставить.

Задача №2. $(\text{Log}_5 (3-x) - \text{Log}_5 1) * (x^2 - (2\sqrt{2})^2) \leq 0$

ДВУ:

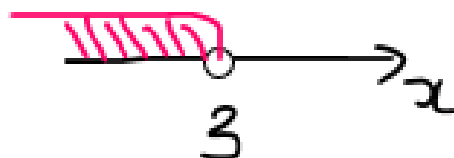
$$\begin{cases} (5-1)(3-x-1)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) \leq 0 \\ 3-x > 0 \\ x^2-6x+9 > 0 \end{cases}$$

1) $4(2-x)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) \leq 0 \mid : 4$
 $(2-x)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) \leq 0$



2) $3-x > 0$

$x < 3$

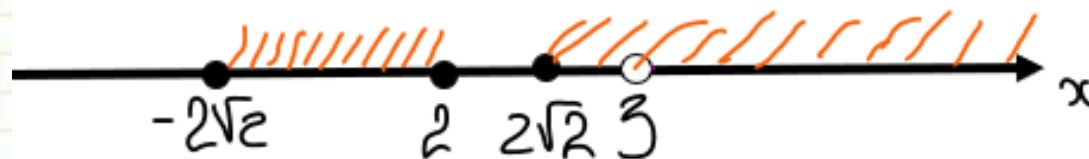


3) $x^2-6x+9 > 0$

$(x-3)^2 > 0$

$x \neq 3$

Найдем пересечение:



Ответ: $[-2\sqrt{2} ; 2] \cup [2\sqrt{2} ; 3) \cup (3 ; +\infty)$

Спасибо за внимание!

