

ЗНАКОМСТВО С АКСИОМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Большинство направлений современной математики и ее приложений строятся на основе аксиоматического метода. Это определяет необходимость знакомства с ним уже в школьном курсе математики.

Аксиоматический метод реализуется следующей последовательностью действий:

- 1) перечисляются первоначальные (неопределяемые) понятия;
- 2) указывается список аксиом, в которых устанавливаются некоторые связи и взаимоотношения между первоначальными понятиями;
- 3) в-третьих, с помощью определений вводятся дальнейшие понятия;
- 4) исходя из первоначальных фактов, содержащихся в аксиомах, выводятся, доказываются с помощью средств вывода дальнейшие факты — теоремы.

Основными требованиями к системе аксиом являются ее полнота, независимость и непротиворечивость.

Рассмотрим пример, который на первом этапе хорошо разъясняет смысл аксиоматического построения простейшей «теории».

Пусть $M = \{\text{Андрей, Борис, Елена}\}$ — некоторое множество учащихся школы.

Известно, что

- (1) Борис приходится братом Елене;
- (2) Елена приходится сестрой Борису;
- (3) Елена не приходится сестрой Андрею;
- (4) Андрей не приходится братом Елене;
- (5) Борис не приходится братом Андрею;
- (6) Андрей не приходится братом Борису.

Утверждения (1) — (6) описывают отношения родства, которые имеют место между учащимися. Ясно, что если мы располагаем всеми утверждениями, то нам известны и все эти отношения.

Возникает вопрос, не избыточны ли эти утверждения для того, чтобы можно было судить обо всех возможных отношениях между ребятами?

Очевидно, если мы не располагаем ни одним из данных утверждений, то ничего определенного об отношениях между ребятами сказать не сможем.

Если знать одно утверждение, например утверждение (1), а остальные утверждения считать неизвестными, то тогда из утверждения (1) следует только утверждение (2). Иными словами, в этом случае можно установить отношения между Борисом и Еленой, а об отношениях между Борисом и Андреем, Еленой и Андреем ничего определенного сказать нельзя. Аналогично, взяв любое другое утверждение и считая остальные утверждения неизвестными, мы сможем узнать их только между одной парой ребят.

Ничего нового не дает случай, когда вместо одного утверждения, например, утверждения (1), взять утверждения (1) и (2), а остальные считать неиз-

вестными. Действительно, из (1) утверждения следует утверждение (2), и наоборот. Утверждения (1) и (2) зависят друг от друга, а остальные от них не зависят.

Если с утверждением (1) взять, например, утверждение (3), а остальные считать неизвестными, то из этой системы утверждений (1) и (3) можно получить все остальные. Так, из утверждения (1) следует утверждение (2), из утверждения (3) — утверждение (4), из утверждений (1) и (3) — утверждение (5), а из него — утверждение (6).

Аналогично, можно получить все утверждения (1) — (6), если иметь два других утверждения, например (2) и (5), а остальные считать неизвестными.

Таким образом, чтобы знать обо всех возможных отношениях родства между ребятами, необязательно знать заранее все утверждения (1) — (6). Располагая только двумя, например утверждениями (1) и (3), можно установить, или «доказать» все остальные. Эти исходные два утверждения, принимаемые без доказательства, называют *аксиомами*, а остальные, которые могут быть доказаны, — *теоремами*. Утверждения (1) и (3), названные нами аксиомами, обозначим соответственно A1 и A2, а утверждения (2), (4) — (6), названные теоремами, обозначим соответственно T1 — T4:

A1. Борис приходится братом Елене;

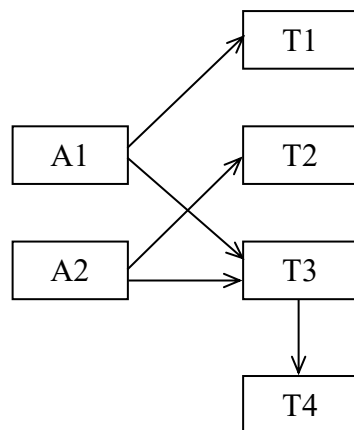
A2. Елена не приходится сестрой Андрею;

T1. Елена приходится сестрой Борису;

T2. Андрей не приходится братом Елене;

T3. Борис не приходится братом Андрею;

T4. Андрей не приходится братом Борису.



Как было показано выше, в качестве аксиом могут быть взяты другие утверждения, например, утверждения (2) и (5), тогда утверждения (1), (3), (4), (6) будут теоремами.

Таким образом, одно и то же утверждение в одном случае может являться аксиомой, в другом случае — теоремой. При одной системе аксиом — одни теоремы, при другой — другие, но всегда общая совокупность утверждений

одна и та же — это утверждения (1) — (6). Такие системы аксиом называют *эквивалентными*.

Систему аксиом называют *полной*, если из нее можно вывести все остальные факты рассматриваемой теории. Так, в нашем примере система аксиом, состоящая из одного утверждения (1) или из двух утверждений (1) и (2), является неполной, а система аксиом $A_1 — A_2$ — полной.

Систему аксиом называют *независимой*, если каждая аксиома не может быть доказана из остальных аксиом данной системы. Так, в нашем случае система аксиом $A_1 — A_2$ является независимой, а система аксиом, состоящая, например, из утверждений (2), (4) и (6), — зависимой, или избыточной.

Важнейшим требованием к системе аксиом является ее *непротиворечивость*, которую можно понимать так: сколько бы мы ни выводили теорем из этих аксиом, среди них не будет двух теорем, противоречащих друг другу. Противоречивая аксиоматика не может служить основой построения содержательной теории. Так, в нашем примере система аксиом $A_1 — A_2$ является непротиворечивой. Не имеет смысла брать в качестве аксиом в нашем примере утверждения «Борис приходится братом Елене», а «Елена не приходится сестрой Борису». Противоречивой будет и система аксиом, состоящая из следующих утверждений:

A1. Борис приходится братом Елене;

A2. Елена приходится сестрой Андрею;

A3. Андрей не приходится братом Борису.

Для иллюстрации того, как в современной математике рассматриваются вопросы непротиворечивости, рассмотрим следующий пример.

Несколько школьников решили организовать шахматный турнир по упрощенной схеме: каждый должен сыграть ровно три партии с кем-либо из остальных участников (а белыми или черными фигурами — по жребию). Составить расписание турнира никак не удавалось, и ребята обратились за помощью к учителю. По просьбе учителя юные шахматисты подсчитали общее число участников: оно оказалось нечетным. Тогда учитель предложил сформулировать требования, которые участники предъявили к турниру, в виде аксиом. Для этого потребовалось ввести три первоначальных (неопределяемых) понятия: «игрок», «партия», «участие игрока в партии». Получили следующие четыре аксиомы:

Аксиома 1. Число игроков конечно.

Аксиома 2. Каждый игрок участвует в трех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждых двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Из этих аксиом можно вывести ряд теорем. Первую теорему предложил сам учитель.

Теорема 1. Число игроков не меньше пяти.

Доказательство. Так как нуль — четное число, то по аксиоме 1 число игроков не равно нулю, то есть существует хотя бы один игрок A . Этот игрок в силу аксиомы 2 участвует в трех партиях, причем в каждой из этих партий кроме A участвует еще один игрок (аксиома 3). Пусть B, C, D — игроки, отличные от A , которые участвуют в этих партиях. По аксиоме 4 все игроки B, C, D различны (если бы, например, было $B=C$, то оказалось бы, что имеются две партии, в которых участвуют игрок A и игрок $B=C$). Итак, мы нашли уже четырех игроков: A, B, C, D . Тогда по аксиоме 1 число игроков не меньше пяти.

Следующую теорему доказали учащиеся. Для этого они определили новое понятие: если q — некоторая партия и A — один из ее участников, то пару (q, A) назвали выступлением игрока.

Теорема 2. Число всех выступлений игроков четно.

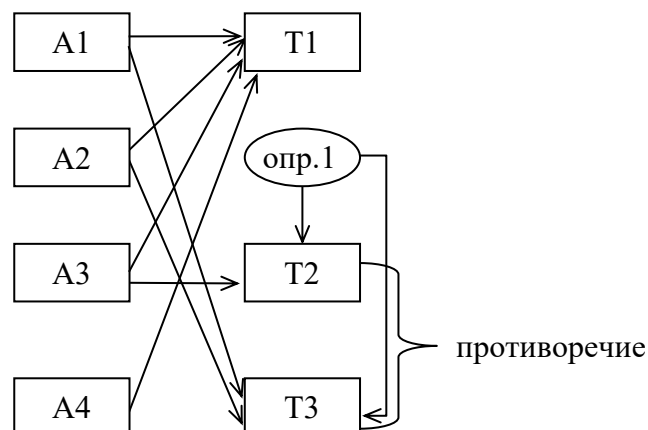
Доказательство. Если в партии q участвуют игроки A и B , то мы получаем два выступления игроков: (q, A) и (q, B) , то есть каждая партия дает ровно два выступления игроков (аксиома 3). Значит, число всех выступлений игроков четно, так как оно вдвое больше числа всех партий.

Однако учитель сформулировал и доказал теорему, противоречащую предыдущей.

Теорема 3. Число всех выступлений игроков нечетно.

Доказательство. По аксиоме 2 игрок A участвует ровно в трех партиях, скажем q_1, q_2, q_3 . Это дает три выступления игрока: $(q_1, A), (q_2, A), (q_3, A)$. Отсюда следует, что число всех выступлений игроков равно $3n$, где n — число игроков. Так как n нечетно (аксиома 1), то и $3n$ — нечетно.

Таким образом, взятая система аксиом позволяет доказать ряд теорем, среди которых имеются две, противоречащие друг другу. Это означает, что данная система аксиом противоречива, то есть требования, выдвинутые организаторами турнира, несовместимы. Неудивительно, что ребята не сумели составить расписание турнира: такого расписания просто не существует.



После этого учитель предложил другой способ организации турнира, при котором каждый из участников должен сыграть не три, а четыре партии с кем-либо из остальных участников. Иначе говоря, он предложил рассмотреть

«теорию», в которой те же первоначальные понятия, а аксиомы формулируются следующим образом:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

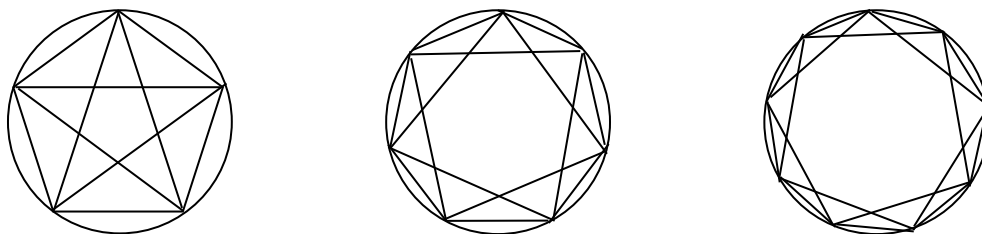
Аксиома 2. Каждый игрок участвует в четырех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждого игрока имеется не более одной партии, в которой он оба участвует.

Ученики проверили рассмотренные ранее теоремы. Оказалось, что первая и вторая теоремы оказались верными, а третья — нет. Ученики не спешили выводить новые теоремы, боясь обнаружить новое противоречие. Учитель же заверил ребят, что, сколько бы теорем они не выводили из этих аксиом, никогда противоречий не будет. Вот как он убедил их в этом.

Рассмотрим пятиугольник, семиугольник, семиугольник и т. д., в которых кроме сторон проведем соответственно пять, семь, девять и т. д. диагоналей, соединяющих вершины через одну.



Вершины многоугольников будем считать «игроками», проведенные отрезки (стороны и диагонали) — «партиями», а концы соответствующего отрезка — «игроками», участвующими в некоторой «партии». Для каждого случая получаем модель (расписание) интересующего нас турнира. Для случая, когда участвует пять игроков, из соответствующей модели видно, что в турнире каждый школьник играет со всеми остальными. Для семи, девяти и т. д. игроков это условие уже не имеет места. При этом легко установить, что все четыре аксиомы здесь выполняются. Итак, для каждого случая удалось построить модель, в которой выполняются все рассматриваемые аксиомы, причем эта модель построена из «материала» геометрии, то есть науки, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся.

Если предположить, что из рассматриваемых четырех аксиом можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу, то тогда доказательства этих двух теорем можно было бы повторить и в построенной модели (ведь в ней все четыре аксиомы имеют место). В результате получится, что, рассуждая, например, о семиугольнике, мы можем получить две противоречащие друг другу теоремы. Но это означало бы, что геометрия — наука противоречивая, чего мы не допускаем. Таким образом, мы должны признать, что двух противоречащих друг другу теорем вывести из рассматриваемых четырех аксиом невозможно.

Вообще, пусть рассматриваются две теории P и Q , причем теория P задается аксиоматически (в ее непротиворечивости мы заранее не уверены), а Q — это хорошо известная теория, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся. Если из «материала» теории Q удастся построить модель, в которой выполняются все аксиомы теории P , то этим непротиворечивость теории P считается установленной.

Именно с помощью моделей в современной математике установлена непротиворечивость геометрии — в предположении непротиворечивости теории действительных чисел. Далее установлена непротиворечивость теории действительных чисел — в предположении непротиворечивости теории рациональных чисел; наконец, установлена непротиворечивость теории рациональных чисел — в предположении непротиворечивости теории натуральных чисел.

Школьный опыт показывает, что знакомство учащихся с аксиоматическим методом положительно влияет на развитие математического мышления, способствует пониманию сущности и значения абстрактного характера математических теорий, обеспечивающего возможность их применения в различных конкретных ситуациях.