МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего

профессионального образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

(ФГАОУ ВО «СПБПУ»)

**Институт среднего профессионального образования**

**Логические основы компьютера**

**Учебное пособие для 1 курса**



Санкт-Петербург

2024 год

|  |  |
| --- | --- |
| РАССМОТРЕНА  предметной (цикловой)  комиссией «Информатика»  Протокол № \_\_\_  от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 20\_\_ г. | Составлено в соответствии  с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям технического профиля |
| Председатель  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Зам. директора по учебно-методической работе \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Конакина Е. Г. |
|  |  |
| РЕКОМЕНДОВАНА  Методическим советом ИСПО  Протокол № \_\_\_\_\_  от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_ г. |  |
| Зам. директора по УМР \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Е.Г. Конакина |  |

*Авторы: Григорьева Н.Г, Малькова Е.Т.*

**Пояснительная записка**

Учебное пособие разработано в помощь изучения студентами первого курса дисциплины «Информатика» на основе требований ФГОС среднего общего образования, примерной программы общеобразовательной учебной дисциплины «Информатика», рекомендованной ФГАУ «ФИРО» (Протокол № 3 от 21 июля 2015 г., регистрационный номер рецензии 375 от 23 июля 2015 г. ФГАУ «ФИРО») и согласно учебных планов института среднего профессионального обучения федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого».

Целью настоящего учебного пособия является формирование информационно-коммуникационной компетентности у студентов: знаний, умений и навыков по информатике, в том числе понимания о логических основах работы компьютера. Также даёт возможность студенту научиться логически мыслить при создании алгоритма решения какой-либо задачи, которая в дальнейшем будет реализована в виде кода программы на компьютере.

Изложение теоретического материала даётся с примерами и пояснениями к ним. В приложении приведены, задания с примерами их решения и индивидуальные задания для самостоятельного выполнения студентами.

Теоретический минимум, условия задач, а также описание математических и логических методов их решения доступны для студентов, что способствует развитию их мотивации в изучении математики и языков программироваия.

В дополнение к настоящему учебному пособию разработан комплекс презентаций, что позволяет студентам самостоятельно изучить данный материал.

**Алгебра логики**

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Алгебра логики (булева алгебра) возникла в середине ХIХ века в трудах английского математика Джорджа Буля. Её создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.



*Логическое высказывание* – это любoе повествовательное пpедлoжение, в oтнoшении кoтopoгo мoжно oднoзначнo сказать, истиннo oнo или лoжнo.

Любое высказывание в алгебре логики рассматривается только с одной точки зрения – является ли оно истинным (“1”) или ложным (“0”).

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если..., то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются *логическими связками*.

Bысказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются *составными*. Высказывания, не являющиеся составными, называются *элементарными*.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают *имена*.

Например.

Пусть через *А* обозначено высказывание “Маша поедет летом на море”, а через *В* – высказывание “Маша летом отправится в горы”.

Тогда составное высказывание “Маша летом побывает и на море, и в горах” можно кратко записать как *А и В*. Здесь “и” – логическая связка, А, В – логические переменные, которые заменяют логические высказывания, принимая только два значения: “*истина*” или “*ложь*”, обозначаемые, соответственно – “1” и “0”.

**Логические операции и таблицы истинности**

Базовыми операциями в алгебре логики являются: *инверсия* (логическое отрицание), *дизъюнкция* (логическое сложение) и *конъюнкция* (логическое умножение).

1. **Логическое отрицание или инверсия**

Инверсия – это составное логическое выражение, если исходное логическое выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное логическое выражение ложно, то результат отрицания будет истинным. Данная операция означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица НЕ.

Обозначение: ¬A или .

Таблица истинности для инверсии

|  |  |
| --- | --- |
| **A** | **¬ А** |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

1. **Логическое сложение или дизъюнкция (разъединение)**

Дизъюнкция – это составное логическое выражение, которое истинно, если хотя бы одно из элементарных логических выражений истинно и ложно тогда и только тогда, когда оба элементарных логических высказывания ложны.

Обозначение: F = A + B или F = A ∨ B, или F = A ∪ B.

Таблица истинности для дизъюнкции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

1. **Логическое умножение или конъюнкция (объединение)**

Конъюнкция – это составное логическое выражение, которое считается истинным в том и только в том случае, когда оба элементарных выражения являются истинными, во всех остальных случаях данное выражение ложно.

Обозначение: F = A ∙ B или F = A ∧ B, или F = A &[[1]](#footnote-1) B, или F = A ∩ B.

Таблица истинности для конъюнкции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

1. **Логическое ИЛИ—НЕ**

ИЛИ—НЕ – это составное логическое выражение, которое истинно тогда и только тогда, если оба элементарных логических выражений ложны, во всех остальных случаях данное выражение ложно.

Обозначение: F = или F= ¬ (A ∨ B).

Таблица истинности для ИЛИ—НЕ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

1. **Логическое И—НЕ**

И—НЕ – это составное логическое выражение, которое считается ложным в том и только в том случае, когда оба элементарных выражения являются истинными, во всех остальных случаях данное выражение истинно.

Обозначение: F =  или F = ¬ (A & B).

Таблица истинности для И—НЕ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

1. **Логическое следование или импликация**

Импликация – это составное логическое выражение, которое истинно во всех случаях, кроме как из истины следует ложь. То есть данная логическая операция связывает два элементарных логических выражения, из которых первое A – условие (посылка), а второе В – следствие. Используемые логические связки: "*если ..., то*", "*из ... следует*", *"... влечет ...*".

Обозначение: F = A → B или F = A ⊃ B.

Можно представить через дизъюнкцию и отрицание: A → B = ¬.

Таблица истинности для импликации

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

1. **Логическая равнозначность или эквивалентность (эквиваленция)**

Эквивалентность – это составное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба элементарных логических выражения имеют одинаковое значение, в остальных случаях ложно. Используемые логические связки: "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "*... равносильно ..."*

Обозначение: F = A ↔ B или F = A ≡ B, или F = A ~[[2]](#footnote-2) B.

Можно представить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

А ↔ В =.

Таблица истинности для эквивалентности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

1. **Логическое «Исключающее ИЛИ». (Сложение по модулю 2)**

**«**Исключающее ИЛИ» – это составное логическое выражение, которое является ложным тогда и только тогда, когда оба элементарных логических выражения имеют одинаковое значение, в остальных случаях истинно.

Обозначение: F = AB или F = A ∆ B.

Можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание: F =.

Таблица истинности «Исключающее ИЛИ»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **F** |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Порядок выполнения логических операций**

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками.

Для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания(«не»)**,** затем конъюнкция («и»),после конъюнкции – дизъюнкция («или»**)** и в последнюю очередь – импликация и эквиваленция.

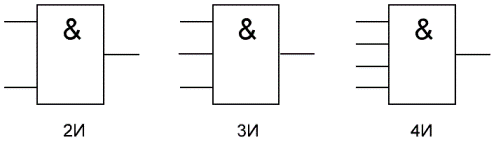
**Логические элементы. Условные обозначения (ГОСТ**[[3]](#footnote-3) **и ANSI**[[4]](#footnote-4)**)**

Логический элемент компьютера – это часть электронной схемы*(соединение различных деталей, в первую очередь – диодов и транзисторов, а также резисторов и конденсаторов, в виде электрической схемы)*, которая реализует базовые логические операции.

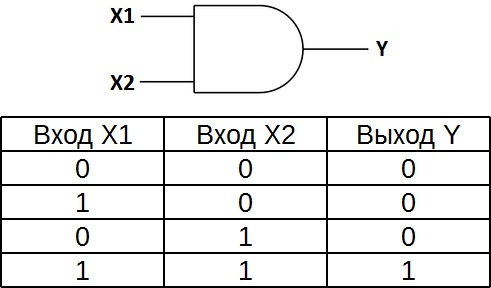
Логическими элементами компьютеров являются электронные схемы*И, ИЛИ, НЕ, И—НЕ, ИЛИ—НЕ* и другие (называемые *вентилями*), а также *триггер* (*trigger (англ.) – курок, пусковой механизм).*

Работу логических элементов описывают с помощью *таблиц истинности* (*таблиц состояний*).

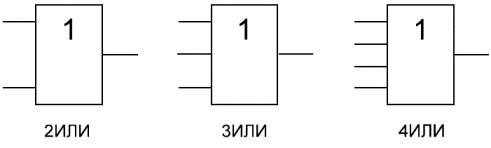
1. **Логический элемент «И» – конъюнкция, логическое умножение, AND**



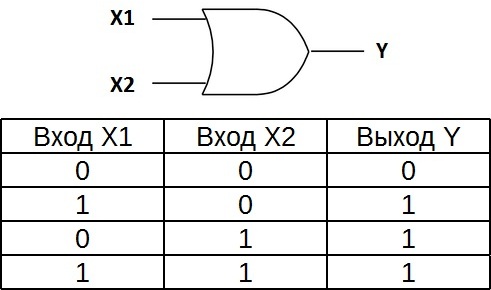
Условные обозначения логических элементов «И» с разным количеством входов приведены на рисунке. В тексте логический элемент «И» с тем или иным числом входов обозначается как «2И» – с двумя входами, «3И» – с тремя входами, «4И» – с четырьмя входами и т. д. В схеме можно вместо знака & ставить ˄.



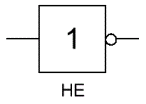
1. **Логический элемент «ИЛИ» – дизъюнкция, логическое сложение, OR**



«ИЛИ» – логический элемент, выполняющий над входными данными операцию дизъюнкции или логического сложения. В тексте логический элемент «ИЛИ» с тем или иным числом входов обозначается как «2ИЛИ» – с двумя входами, «3ИЛИ» – с тремя входами, «4ИЛИ» – с четырьмя входами и т. д. В схеме можно вместо 1 ставить ˅.



1. **Логический элемент «НЕ» - отрицание, инвертор, NOT, INV**

 или

НЕ

«НЕ» – логический элемент, выполняющий над входными данными операцию логического отрицания. Данный элемент, имеющий один выход и только один вход, называют еще инвертором, поскольку он инвертирует (обращает) входной сигнал. На рисунке приведено условное обозначение логического элемента «НЕ».

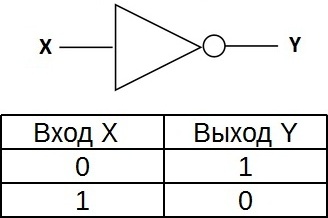
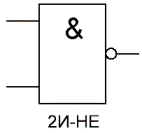
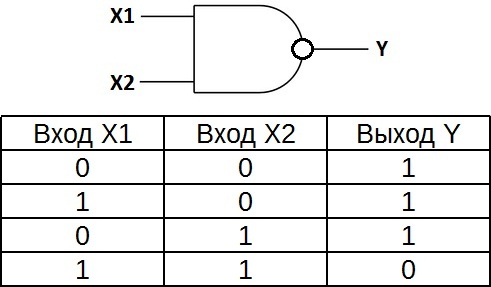


Таблица истинности для инвертора показывает, что высокий потенциал на входе даёт низкий потенциал на выходе и наоборот.

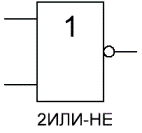
1. **Логический элемент «И-НЕ»** – **конъюнкция (логическое умножение) с отрицанием, NAND**



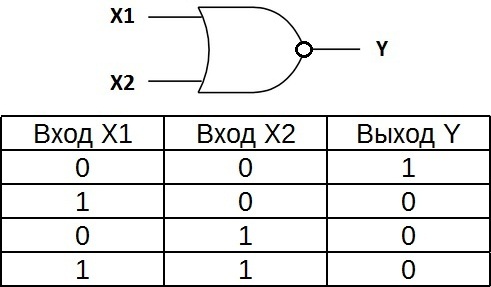
«И-НЕ» – логический элемент, выполняющий над входными данными операцию логического сложения, затем операцию логического отрицания, результат подается на выход. На рисунке приведено условное обозначение логического элемента «2И-НЕ».



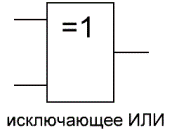
1. **Логический элемент «ИЛИ-НЕ» – дизъюнкция (логическое сложение) с отрицанием, NOR**



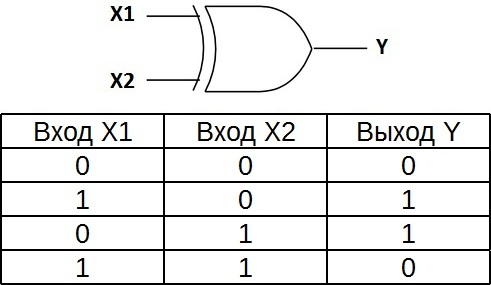
«ИЛИ-НЕ» – логический элемент, выполняющий над входными данными операцию логического сложения, и затем операцию логического отрицания, результат подается на выход. Иначе говоря, это элемент «ИЛИ», дополненный элементом «НЕ» - инвертором. На рисунке приведено условное обозначение логического элемента «2ИЛИ-НЕ».



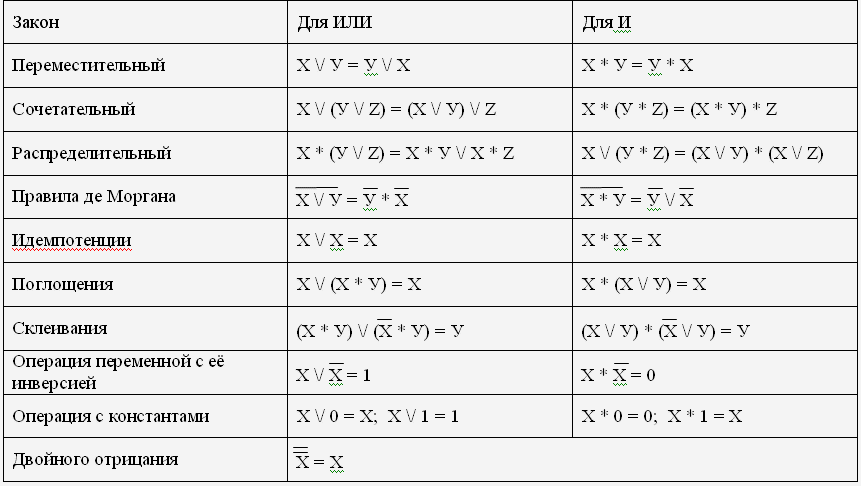
1. **Логический элемент «Исключающее ИЛИ» – сложение по модулю 2, XOR**



«Исключающее ИЛИ» – логический элемент, выполняющий над входными данными операцию логического сложения по модулю 2, имеет два входа и один выход. В схеме можно вместо знака =1 ставить. Часто данные элементы применяют в схемах контроля.



**Законы алгебры логики**



ВЫВОД**.** На этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики и законы алгебры логики позволяют значительно упростить логические функции, описывающие функционирование схем компьютера и, следовательно, уменьшить число элементарных логических элементов, из которых состоят основные узлы компьютера.

**Упрощение логических формул**



1.

Использованы законы логики: правило де Моргана, сочетательный закон, правило операций переменной с её инверсией и правило операций с константами.



2.

Использованы законы логики: закон идемпотенции, так как повторяется второй множитель, затем комбинируются два первых и два последних множителя и используется закон склеивания.

**Построение логических схем и таблиц истинности для сложных логических выражений**

Дана формула логического выражения:



Построить логическую схему и таблицу истинности.

Логическая схема:

a

b

c

1

a

b

a˅b

c

c

a

1

&

c˅a

F

Для построения таблицы истинности надо определить количество строк и столбцов.

Количество строк равно 2n плюс одна строка для заголовка, где n – количество переменных (количество элементарных высказываний).

Количество столбцов равно количеству переменных плюс необходимое для вычислений количество логических операций.

Таблица истинности:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c |  |  |  | F |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Анализ таблиц истинности логических выражений**

Логическая функция F задаётся выражением (x ∨ y) ∧ ¬(y ≡ z) ∧ ¬w.

На рисунке приведён частично заполненный фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий неповторяющиеся строки. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z, w.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ? | ? | ? | ? | F |
| 1 |  | 1 |  | 1 |
| 0 | 1 |  | 0 | 1 |
|  | 1 | 1 | 0 | 1 |

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы. Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

РЕШЕНИЕ

1. перепишем выражения в виде 
2. поскольку имеем логическое произведение значение *w* обязательно должно быть равно 0, то есть, в столбце *w* таблицы должны быть все нули; это возможно только в последнем столбце:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **?** | **?** | **?** | **w** | **F** |
| **1** |  | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** |  | **0** | **1** |
|  | **1** | **1** | **0** | **1** |

1. теперь определим все комбинации переменных, для которых функция равна 1 (их не должно быть много!)
2. чаще всего в выражении встречается переменная y, поэтому мы сначала примем *y =* 0, а затем, *y =* 1.
3. при *y =* 0 (и *w =* 0) получаем, что справедливо только при *x =* 1и *z =* 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **w** | **F** |
| **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |

1. при *y =* 1 (и *w =* 0) получаем, что справедливо при *z =* 0 и любом *x*, это даёт ещё два варианта:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **w** | **F** |
| **0** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **1** |

1. объединим три полученных строки:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **w** | **F** |
| **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **1** |

1. видим, что в столбце z должна быть одна единица и два нуля, это возможно только в первой строке исходной таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **z** | **?** | **?** | **w** | **F** |
| **1** |  | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** |  | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** |

1. при *z =* 1нужно, чтобы *y =* 0, поэтому второй столбец – это *y*, а третий – *x*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **z** | **y** | **x** | **w** | **F** |
| **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** |

ОТВЕТ: zyxw.

**Отрезки**

На числовой прямой даны два отрезка: P=[44,48] и Q=[23,35].

Укажите наибольшую возможную длину промежутка А, для которого формула

((x ϵ P) → (x ϵ Q)) ∧ (x ϵ A) тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x.

РЕШЕНИЕ

* Упростим формулу, избавившись от «x ϵ»:

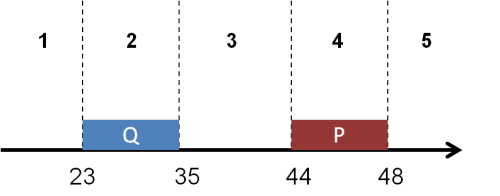
(P → Q) ∧ A

* Теперь преобразуем импликацию в скобках:

**правило импликации:** a → b = ¬a ∨ b

(¬P ∨ Q) ∧ A

* Указанные в задании отрезки отобразим на числовой прямой. Разделим отрезки на части по точкам, соответствующим их границам.

[](http://labs.org.ru/wp-content/uploads/2017/06/1-54.png)

* По условию выражение должно быть ложно:

(¬P ∨ Q) ∧ A = **0**

* Внешняя операция выражения — конъюнкция — ложна в трех случаях и только в одном — истинна:

(¬P ∨ Q) ∧ A

0 ∧ **0 = 0**

**0 ∧ 1 = 0**

**1 ∧ 0 = 0**

**1 ∧ 1 = 1**

* Теперь рассмотрим это выражение относительно наших отрезков на числовой прямой: если известная часть выражения (**¬P ∨ Q**) на каком-либо отрезке прямой дает истину, то неизвестная часть (**A**) должна возвращать ложь (по условию формула должна быть тождественно ложна).
* Рассмотрим все отрезки числовой прямой для известной части выражения:

1. (¬P ∨ Q) = 1 ∨ 0 = 1 - на данном отрезке А должно равняться **0**

2. (¬P ∨ Q) = 1 ∨ 1 = 1 - на данном отрезке А должно равняться **0**

3. (¬P ∨ Q) = 1 ∨ 0 = 1 - на данном отрезке А должно равняться **0**

4. (¬P ∨ Q) = 0 ∨ 0 = 0 - на данном отрезке А может! равняться **1**

5. (¬P ∨ Q) = 1 ∨ 0 = 1 - на данном отрезке А должно равняться **0**

* Получаем, что на всех отрезках кроме 4-го выражение

¬P ∨ Q истинно, т.е. на отрезках 1, 2, 3 и 5 неизвестная часть A должна быть ложной (чтобы формула вернула ложь). Отсюда следует, что А может быть истинно только на отрезке 4.

* Длина отрезка 4 составляет:

48 - 44 = 4.

ОТВЕТ: 4

**Базовые логические элементы компьютера**

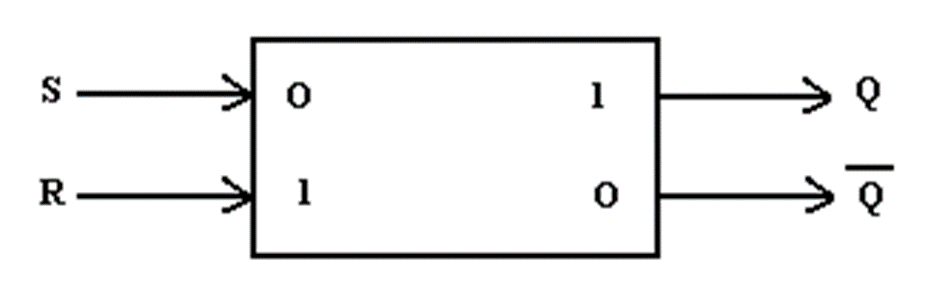
1. **Триггер**

Триггер – это электронная схема, широко применяемая в регистрах компьютера для надёжного запоминания одного разряда двоичного кода.

Триггер имеет два устойчивых состояния, одно из которых соответствует двоичной единице, а другое – двоичному нулю.

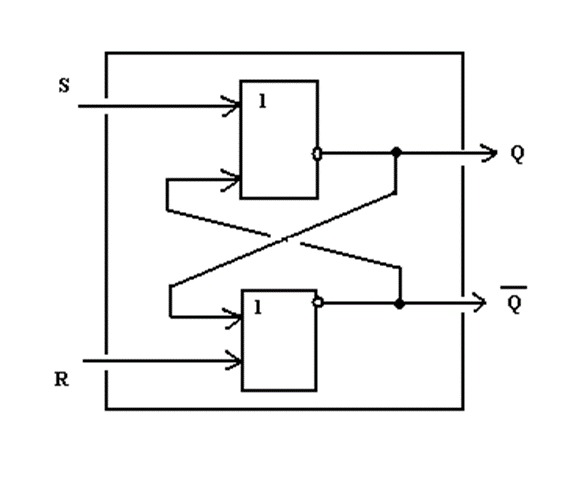
Регистр – это устройство, состоящее из последовательности триггеров. Регистр предназначен для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым можно представлять и адрес, и команду, и данные.

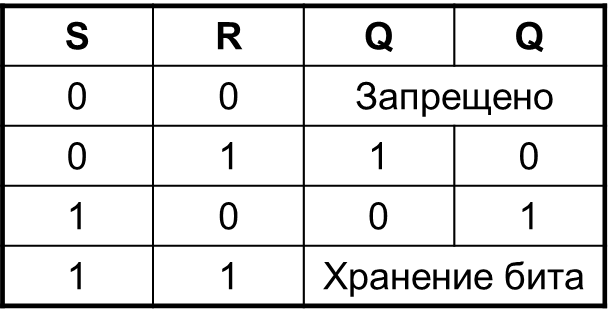
Условное обозначение триггера



1. **Реализация триггера с помощью вентилей ИЛИ – НЕ**

Самый распространённый тип триггера – RS-триггер (S и R, соответственно set – установка, и reset – сброс).





Если на входы триггера подать S=1, R=0, то (при любом состоянии Q) на выходе верхнего вентиля станет Q=0. После этого на входах нижнего вентиля окажется R= 0 и Q=0, и выход =1.

Точно так же при подаче 0 на вход S и 1 на вход R на выходе Q =1, а выход  станет равным 0.

Если на входы R и S будет подана логическая 1, то состояние Q и  не меняется.

Подача на оба входа R и S логического 0 невозможна, поскольку на вход подается импульс либо на установку, либо на сброс. Отсутствие импульса (R=0 и S=0) не изменяет состояния триггера, и с помощью схемы можно считывать состояние триггера при каждом такте.

Поскольку один триггер может запомнить только один разряд двоичного кода, то для запоминания байта нужно 8 триггеров, для запоминания килобайта, соответственно

8∙1024 = 8192 триггера.

1. **Сумматор двоичных чисел**

В целях максимального упрощения работы компьютера все многообразие математических операций в процессоре сводится к сложению двоичных чисел. Поэтому главной частью процессора являются сумматоры – это электронные логические схемы, выполняющие суммирование двоичных чисел. Сумматор служит центральным узлом арифметико–логического устройства компьютера.

Многоразрядный двоичный сумматор предназначен для сложения многоразрядных двоичных чисел и представляет собой комбинацию одноразрядных сумматоров.

Условное обозначение одноразрядного сумматора и таблица истинности

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C:\Users\emalkova.ISPO\Pictures\ab353f0e-bdad-4c7c-9dc3-0dabfd0cbf0c.jpeg | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Входы | | | Выходы | | | Первое слагаемое | Второе  слагаемое | Перенос | Сумма | Перенос | | A | B | P | S | P0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

**Решение логических задач**

Наиболее распространены три способа решения логических задач:

* средствами алгебры логики;
* табличный;
* с помощью рассуждений.

1. **Решение логических задач средствами алгебры логики**

Этапы решения задач средствами алгебры логики:

* изучается условие задачи;
* вводится система обозначений для логических высказываний;
* создается логическая формула, описывающая логические связи между всеми условиями задачи;
* определяются значения истинности этой логической формулы;
* из полученных значений истинности формулы определяются значения истинности введенных логических высказываний, на основании которых делается заключение о решении.

ЗАДАЧА.

Внимание Андрея, Дениса и Коли привлек промчавшийся мимо автомобиль. Ребята выдвинули три версии:

1. Английская машина «Феррари»

2. Итальянская машина «Понтиак»

3. Не английская машина «Сааб»

Проходящий мимо человек сказал, что *каждый из ребят прав только в одном из двух высказываний*.

Какой же марки был тот автомобиль?

РЕШЕНИЕ.

Введем обозначение для логических высказываний:

А – машина английская;

Ф – «Феррари»;

И – итальянская машина;

П – «Понтиак»;

С – «Сааб».

Из того факта, что каждый из друзей прав в чем-то одном, получаем три истинных составных высказывания:

А ˄  ˄ Ф; И ˄  ˄ П; ͞ ˅ А ˄ С

Перемножаем все эти истинные логические выражения:

(А ˄  ˄ Ф) ˄ (И ˄  ˄ П) ˄ (͞ ˅ А ˄ С) = А ˄  ˄ И ˄ П ˄  ˅ А ˄  ˄ И ˄ П ˄ А ˄ С ˅ А ˄ ͞ ˄  ˄ П ˄  ˅ А ˄ ͞ ˄  ˄ П ˄ А ˄ С ˅ ͞ ˄ Ф ˄ И ˄ П ˄ А ˄  ˅ А ˄ Ф ˄ И ˄ П ˄ А ˄ С ˅ А ˄ Ф ˄  ˄ П  ˅ ͞ ˄ Ф ˄ И ˄ П ˄ А ˄  = 0 ˅ 0 ˅ 0 ˅ 0 ˅ А ˄  ˄ И ˄ П ˄  ˅ 0 ˅ 0 ˅ 0 =  ˄ Ф ˄ И ˄  ˄ .

Для решения нужно определить, при каких значениях логических переменных А, И, Ф, П, С это высказывание истинно. Упростим выражение, так как машина не может одновременно быть английской и итальянской (А **˄** И=0), также не может одновременно иметь два названия (Ф **˄** С=0; Ф **˄** П=0; П **˄** С=0).

Высказывание: ͞ ˄ Ф ˄ И ˄  ˄  истинно только при И = 1, Ф = 1, А = 0,

П = 0, С = 0.

ОТВЕТ:машина итальянская марки «Феррари».

1. **Решение логических задач табличным способом**

ЗАДАЧА.

В оркестр приняли 3-х музыкантов – Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе.

Известно, что:

1. Смит – самый высокий;
2. Играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
3. Играющие на скрипке и флейте также как и Браун любят пиццу;
4. Когда между альтистом и трубачом возникает ссора, их мирит Смит;
5. Браун не умеет играть на трубе и гобое.

Также известно, что *каждый из музыкантов владеет двумя инструментами*.

РЕШЕНИЕ.

Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 1 и 0 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Логично что каждый музыкант играет только на двух инструментах, на которых остальные не могут.

*Из условия 4* следует, что Смит не играет на альте и трубе, а*из условий 3 и 5*что Браун не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Брауна – альт и кларнет. Заносим это в таблицу, а оставшиеся клетки заполним 0.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Скрипка | Флейта | Альт | Кларнет | Гобой | Труба |
| Браун | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Смит |  |  | 0 | 0 |  | 0 |
| Вессон |  |  | 0 | 0 |  |  |

*Из таблицы 1* видно, что на трубе может играть только Вессон.

*Из условий 1 и 2* следует, что Смит не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Браун, ни Смит, то скрипачом является Вессон. Оба инструмента, на которых играет Вессон, теперь определены, поэтому остальные клетки строки «Вессон» можно заполнить нулями.

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Скрипка | Флейта | Альт | Кларнет | Гобой | Труба |
| Браун | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Смит | 0 |  | 0 | 0 |  | 0 |
| Вессон | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

*Из таблицы 1 и 2* видно, что играть на флейте и на гобое может играть только Смит.

В результате получаем таблицу 3:

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Скрипка | Флейта | Альт | Кларнет | Гобой | Труба |
| Браун | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Смит | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Вессон | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

ОТВЕТ:Браун играет на альте и кларнете, Смит на флейте и гобое, Вессон на скрипке и трубе.

1. **Решение логических задач с помощью рассуждений**

ЗАДАЧА.

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский.

На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский».

Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только *одно утверждение верно, а два других ложны*.

Какой язык изучает каждый из молодых людей?

РЕШЕНИЕ.

Есть три утверждения:

1. Сергей не изучает китайский;
2. Вадим изучает китайский;
3. Михаил не изучает арабский.

Если верно *первое* утверждение, то верно и второе и третье, так как они изучают различные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно.

Если верно *второе* утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что двое изучают китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно. Остается считать верным *третье* утверждение, первое и второе – ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

ОТВЕТ: Сергей изучает китайский, Михаил – японский, Вадим – арабский.

**Приложение**

**Теория по множествам**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название операции | Форма записи | Таблица истинности | Круги Эйлера |
| Операция «НЕ». Логическое отрицание. Инверсия. | http://informatika-i-l.ucoz.com/2223.png | |  |  | | --- | --- | | A | ¬A | | 0 | 1 | | 1 | 0 | | http://informatika-i-l.ucoz.com/1.png |
| Операция «И». Логическое умножение.  Логическое произведение. Конъюнкция. | http://informatika-i-l.ucoz.com/3333.png | |  |  |  | | --- | --- | --- | | A | B | A\*B | | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 | | 1 | 1 | 1 | | http://informatika-i-l.ucoz.com/kjhjknkjn.png |
| Операция «ИЛИ». Логическое сложение.  Логическая сумма. Дизъюнкция. | http://informatika-i-l.ucoz.com/444.png | |  |  |  | | --- | --- | --- | | A | B | A+B | | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | http://informatika-i-l.ucoz.com/ffhf.png |
| Операция исключающее «ИЛИ».  Сложение по модулю 2.  Разделительная дизъюнкция. Строгая дизъюнкция. | http://informatika-i-l.ucoz.com/4555.png | |  |  |  | | --- | --- | --- | | A | B | Ahttp://informatika-i-l.ucoz.com/5265265.pngB | | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 0 | | http://informatika-i-l.ucoz.com/ghnghjng.png |

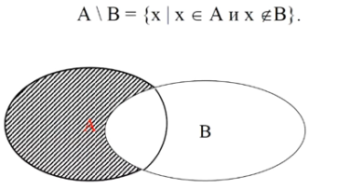
* универсальное множество U (на кругах Эйлера обозначается в виде прямоугольника) – это множество, содержащее все возможные элементы определенного типа (например, все вещественные числа):

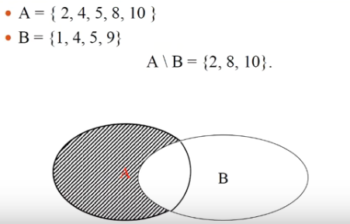
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/mnozhestva2.png)

* универсальное множество соответствует логической единице: для любого множества целых чисел X справедливы равенства:

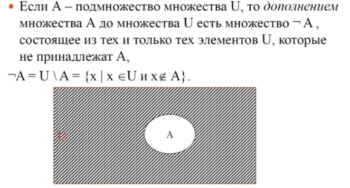
X ∨ U = U и X ∧ U = X

* разностью двух множеств A и B называется новое множество, элементы которого принадлежат A, но не принадлежат B:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/mnozhestva7.png)

Пример разности множеств:  
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/mnozhestva8.png)

* дополнение множества X – это разность между универсальным множеством U и множеством X (например, для целых чисел ¬ X – все целые числа, не входящие в X)

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/mnozhestva9.png)

* пусть требуется выбрать множество A так, чтобы выполнялось равенство

A ∨ X = U; в этом случае множество A должно включать дополнение ¬ X, то есть

A ≥ ¬ X, то есть Amin = ¬ X.

* пусть требуется выбрать множество A так, чтобы выполнялось равенство ¬ A ∨ X = U, в этом случае множество ¬ A должно включать дополнение ¬ X,

то есть ¬ A ≥ ¬ X, то есть Amax = X.

Для решения заданий необходимо знать рассмотренную тему о множествах.

Для упрощения решений можно пользоваться следующими законами.

Если в задании формула тождественно истинна (равна *1*), и после упрощения *A* *без отрицания* то используется закон:

Amin = ¬B,

где *B* – известная часть выражения.

Если в задании формула тождественно истинна (равна *1*), и после упрощения *A* *с отрицанием* то используется закон:

Amax = B,

где *B* – известная часть выражения.

Если в задании формула тождественно ложна (равна *0*)**,** и после упрощения *A* *без отрицания* то используется закон:

Amax = ¬B,

где *B* – известная часть выражения.

Если в задании формула тождественно ложна (равна *0*), и после упрощения *A* *с отрицанием*то используется закон:

Amin = B,

где *B* – известная часть выражения.

ЗАДАЧА

Элементами множеств А, P, Q являются натуральные числа, причём

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20},

Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}.

Известно, что выражение

((x ∈ A) → (x ∈ P)) ∧ ((x ∈ Q) → ¬(x ∈ A)) истинно (то есть принимает значение 1) при любом значении переменной х.

Определите наибольшее возможное количество элементов в множестве A.

РЕШЕНИЕ 1

Введем обозначения:

(x ∈ P) ≡ P; (x ∈ Q) ≡ Q; (x ∈ A) ≡ A.

Тогда, применив преобразование импликации, получаем:

(¬A + P) · (¬Q + ¬A) = ¬A + ¬ Q · P

(pаспpеделительный закон)

Требуется чтобы ¬A + ¬Q · P = 1.

Если в задании формула тождественно истинна (равна *1*), и после упрощения *A* *с отрицанием* то используется закон:

Amax = B,

где *B* – известная часть выражения, т.е. ¬Q · P

Выражение ¬Q · P истинно, когда x ∈ {2, 4, 8, 10, 14, 16, 20}.

Тогда ¬A должно быть истинным когда x ∈ {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23,...}.

Следовательно, максимальное количество элементов в множестве A будет, если A включает в себя все элементы множества ¬Q · P, таких элементов семь.

ОТВЕТ: 7.

РЕШЕНИЕ 2

Введем обозначения:

(x ∈ P) ≡ P; (x ∈ Q) ≡ Q; (x ∈ A) ≡ A; ∧ ≡ · ; ∨ ≡ +.

Тогда, применив преобразование импликации, получаем:

(¬A + P) · (¬Q + ¬A) ⇔ ¬A · ¬Q + ¬Q · P + ¬A + ¬A · P ⇔

⇔ ¬A · ¬Q + P + 1) + ¬Q · P ⇔ ¬A + ¬Q · P.

Требуется чтобы ¬A + ¬Q · P = 1. Выражение ¬Q · P истинно когда x ∈ {2, 4, 8, 10, 14, 16, 20}. Тогда ¬A должно быть истинным когда x ∈ {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23,...}.

Следовательно, максимальное количество элементов в множестве A будет, если A включает в себя все элементы множества ¬Q · P, таких элементов семь.

ОТВЕТ: 7.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Упростить логическую формулу.



1. Решить логическую задачу.

В поездке пятеро друзей – Антон, Борис, Вадим, Дима и Гриша знакомились с попутчицей. Они предложили ей отгадать их фамилии. Каждый из них высказал одно истинное и одно ложное утверждение.

Дима сказал: «Моя фамилия – Мишин, фамилия Бориса – Хохлов».

Антон сказал: «Мишин – это моя фамилия, а фамилия Вадима – Белкин».

Борис сказал: «Фамилия Вадима – Тихонов, а моя фамилия – Мишин».

Вадим сказал: «Моя фамилия – Белкин, а фамилия Гриши – Чехов».

Гриша сказал: «Да, моя фамилия – Чехов, а фамилия Антона – Тихонов».

Какую фамилию носит каждый из друзей?

1. Построить логическую схему и таблицу истинности для логического выражения.



1. Анализ таблицы истинности логических выражений.

Логическая функция F задаётся выражением ((x ∧ ¬y) ∨ (w → z)) ≡ (z ≡ x).

На рисунке приведён частично заполненный фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий неповторяющиеся строки. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z, w.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ? | ? | ? | ? | F |
|  | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 |  |  | 1 | 1 |

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы. Буквы в ответе пишите подряд

1. Решить задачу на отрезки.

На числовой прямой даны два отрезка: P = [10,20] и Q = [30,40]. Укажите наибольшуювозможную длину отрезка **A**, для которого формула

((x ∈ P) → (x ∈ Q)) → ¬(x ∈ A) тождественно истинна, то есть принимает значение **1** при любом значении переменной x.

1. Решить задачу на множества

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

(*x* ∈{2, 4, 6, 8, 10, 12}) → (((*x* ∈{4, 8, 12, 116}) ∧ ¬(*x* ∈ A)) → ¬(*x* ∈{2, 4, 6, 8, 10, 12}))

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной х.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

**Ответы на самостоятельные задачи**

1. Логическая формула.



Дважды применяется правило де Моргана, затем – закон двойного отрицания.

1. Логическая задача.

Борис – Хохлов; Вадим – Тихонов; Гриша – Чехов; Антон – Мишин; Дима – Белкин.

1. Анализ таблицы истинности логических выражений

zywx

1. Отрезки.

10

1. Множества.

24.

**Оглавление**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Пояснительная записка……………………………………………………………...... | 3 |
| 2. | Алгебра логики………………………………………………………………………... | 4 |
| 3. | Логические операции и таблицы истинности………………………………………. | 5 |
| 4. | Порядок выполнения логических операций………………………………………… | 8 |
| 5. | Логические элементы. Условные обозначения (ГОСТ и ANS)……………………. | 8 |
| 6. | Законы алгебры логики………………………………………………………………. | 13 |
| 7. | Упрощение логических формул……………………………………………………... | 13 |
| 8. | Построение логических схем и таблиц истинности для сложных логических выражений……………………………………………………………………………… | 13 |
| 9. | Анализ таблиц истинности логических выражений………………………………… | 14 |
| 10. | Отрезки…………………………………………………………………………………. | 16 |
| 11. | Базовые логические элементы компьютера………………………………………….. | 17 |
| 12. | Решение логических задач……………………………………………………………. | 19 |
| 13. | Теория по множествам………………………………………………………………… | 22 |
| 14. | Задачи для самостоятельного решения………………………………………………. | 26 |
| 15. | Ответы на самостоятельные задачи………………………………………………….. | 28 |
| 16. | Оглавление…………………………………………………………………………….. | 29 |
|  |  |  |

1. & Амперсанд – обозначает логическое «и» [↑](#footnote-ref-1)
2. ~ Знак порядка (тильда) [↑](#footnote-ref-2)
3. ГОСТ – Государственный Стандарт [↑](#footnote-ref-3)
4. ANSI – Американский национальный институт стандартов [↑](#footnote-ref-4)