

*Шкрябко Н. А., преподаватель кафедры  
математики и естественно - научных дисциплин*

*ФГБОУ ВО «АГПУ»*

*Россия, г. Армавир*

*Аскольская А.С.*

*студентка*

*4 курс, факультет «Физико – математический»*

*ФГБОУ ВО «АГПУ»*

*Россия, г. Армавир*

## **МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Аннотация:** *Статья посвящена методам решения тригонометрических уравнений, которые являются важной областью в математическом анализе. В статье рассматриваются основные приемы и алгоритмы преобразования тригонометрических выражений, а также различные подходы к нахождению корней уравнений. Особое внимание уделено использованию основных тригонометрических тождеств и замене переменных. Представленные методы позволяют систематизировать процесс решения и применимы как в учебных задачах, так и в приложениях прикладной математики.*

**Ключевые слова:** *тригонометрические уравнения, методы решения, тригонометрические тождества, преобразование выражений, нахождение корней, замена переменных, математический анализ.*

**Abstract:** *This article is dedicated to methods for solving trigonometric equations, which constitute an important area in mathematical analysis. The paper examines the fundamental techniques and algorithms for transforming*

*trigonometric expressions, as well as various approaches to finding the roots of equations. Special attention is given to the use of basic trigonometric identities and variable substitution. The presented methods allow for the systematization of the solution process and are applicable in both educational tasks and applied mathematics applications.*

*Keywords: trigonometric equations, solution methods, trigonometric identities, expression transformation, root finding, variable substitution, mathematical analysis.*

## **Введение**

Сегодня приоритетом школьного образования является развитие учащихся. Основная задача – формирование интеллектуально развитой личности в процессе активного обучения. Математика, будучи одним из фундаментальных школьных предметов, вносит существенный вклад в воспитание мыслящего человека. Математика охватывает множество областей, каждая из которых имеет свои специфические трудности. В этой статье мы уделим внимание тригонометрии.

Тригонометрия уже давно не преподается как отдельная дисциплина в школе, а интегрирована в курсы геометрии, алгебры и алгебры с началами анализа. Исторически, тригонометрическим уравнениям и неравенствам всегда придавалось особое значение в школьном обучении, что подчеркивает их фундаментальную важность, известную еще с античных времен.

Тригонометрические уравнения занимают ключевое положение в программе средней школы. Это обусловлено как объемом и сложностью материала, так и возможностями, которые они предоставляют для развития учебно-познавательной деятельности. Изучение этих тем позволяет формировать навыки, необходимые для решения широкого спектра теоретических и прикладных задач.

## **Методы решения тригонометрических уравнений, неравенств и систем.**

Тригонометрическим уравнением называется равенство тригонометрических выражений, содержащих переменную только под знаком

тригонометрических функций. Решить тригонометрическое уравнение – значит найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению. Тригонометрические уравнения сводятся цепочкой равносильных преобразований, заменами и решениями алгебраических уравнений к простейшим тригонометрическим уравнениям.

Уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}x$ ;  $\operatorname{tg} 3x = x^2 + 1$  и т.д. не являются тригонометрическими и, как правило, решаются приближенно или графически. Может случиться так, что уравнение не является тригонометрическим согласно определению, однако оно может быть сведено к тригонометрическому. Например,  $2(x - 6) \cos 2x = x - 6$ ,  $(x - 6)(2 \cos 2x - 1) = 0$ , откуда  $x = 6$  или  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{x}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### **Выделим основные методы решения тригонометрических уравнений**

#### **1. Разложение на множители.**

#### **2. Введение новой переменной:**

- а) сведение к квадратному;
- б) универсальная подстановка;
- с) введение вспомогательного аргумента.

#### **3. Сведение к однородному уравнению.**

#### **4. Применение формул.**

#### **5. Использование свойств функций, входящих в уравнение:**

- а) обращение к условию равенства тригонометрических функций;
- б) использование свойства ограниченности функции.

### **1. Уравнения, в которых все функции выражаются через одну тригонометрическую функцию от одного и того же аргумента.**

Примеры:  $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ ,

$$\operatorname{tg} 3x + 2 \operatorname{ctg} 3x - 3 = 0.$$

Преобразованиями  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  и  $\operatorname{ctg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$  эти уравнения

приводятся к алгебраическим, решая которые получаем простейшие тригонометрические уравнения. Метод сведения к квадратному состоит в том, что, пользуясь изученными формулами, надо преобразовать уравнение к

такому виду, чтобы какую-то функцию (например,  $\sin x$  или  $\cos x$ ) или комбинацию функций обозначить через  $y$ , получив при этом квадратное уравнение относительно  $y$ .

## 2. Уравнения, решаемые разложением на множители.

Под разложением на множители понимается представление данного выражения в виде произведения нескольких множителей. Если в одной части уравнения стоит несколько множителей, а в другой – 0, то каждый множитель приравнивается к нулю. Таким образом, данное уравнение можно представить в виде совокупности более простых уравнений.

Например:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0,$$

$$\cos 2x = 0 \text{ или } 2 \sin 2x - 1 = 0.$$

## 3. Уравнения однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$ .

Примеры:  $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$

$$2 \sin^3 5x - 2 \sin^2 5x \cos 5x + \sin 5x \cos^2 5x - \cos^3 5x = 0,$$

$$3 \sin 7x - 2 \cos 7x = 0.$$

Если первый коэффициент не равен нулю, то разделив обе части уравнения на  $\cos^n x$ , получим уравнение  $n$ - степени, относительно  $\operatorname{tg} x$ . Решая полученное уравнение перейдем к простейшему. При делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения  $\cos x = 0$  корнями данного уравнения. Если  $\cos x = 0$ , то из уравнений следует, что  $\sin x = 0$ . Однако  $\sin x$  и  $\cos x$  не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Следовательно, при делении уравнения на  $\cos^n x$ , получаем уравнение, равносильное данному. В случае, если первый или последний коэффициент равен нулю, то имеет смысл вынести за скобки  $\sin x$  или  $\cos x$ . Решить уравнение приравняв к нулю каждый множитель.

#### 4. Уравнения, сводящиеся к однородным.

Примеры:  $3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 2$ ,

$$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x - 2 \cos x = 0.$$

Эти уравнения сводятся к однородным уравнениям следующим образом:

$$3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 2 (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x - 2 \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0.$$

#### 5. Уравнения, линейные относительно $\sin x$ и $\cos x$

**$a \sin x + b \cos x = c$ , где  $a, b$  и  $c$  – любые действительные числа.**

Если  $a=b=0$ , а  $c \neq 0$ , то уравнение теряет смысл;

Если  $a=b=c=0$ , то  $x$  – любое действительное число, то есть уравнение обращается в тождество.

Рассмотрим случай, когда  $a, b, c \neq 0$ .

Примеры:

$$\sin x + 4 \cos x = 1,$$

$$3 \sin 5x - 4 \cos 5x = 2,$$

$$2 \sin 3x + 5 \cos 3x = 8.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его не превосходит 7.

Уравнения, этого вида можно решить многими способами: с помощью универсальной подстановки, выразив  $\sin x$  и  $\cos x$  через  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ; сведением уравнения к однородному; введением вспомогательного аргумента и другими.

Рассмотрим последний из них.

Разделим обе части уравнения на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Так как  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ , то найдется аргумент  $\varphi$ , при котором

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнение примет вид  $\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Используя формулу получим  $\sin (x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Следовательно решением уравнения будет  $x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Решение этого уравнения существует при  $a^2 + b^2 \geq c^2$ .

## 6.Уравнения, сводящиеся к равенству одной тригонометрической функции от различных аргументов:

1)  $\sin x = \sin y,$       2)  $\cos x = \cos y,$       3)  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y.$

При решении этих уравнений можно применить метод использования условий равенства одноименных тригонометрических функций. Равенство этих функций имеет место тогда и только тогда, когда, соответственно,  $x = (-1)^n y + \pi n,$

$$x = \pm y + 2\pi m, \quad x = y + \pi n.$$

### Формулы общих решений тригонометрических уравнений

$\sin f(x) = \sin g(x)$	$\cos f(x) = \cos g(x)$	$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$
$f(x) = g(x) + 2\pi k$	$f(x) = g(x) + 2\pi k$	$f(x) = g(x) + \pi k$
$f(x) = \pi - g(x) + 2\pi n$	$f(x) = -g(x) + 2\pi n$	$g(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$	$n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$	$n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

Примеры:  $\cos 4x = \sin 6x$ ,  $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ .

Первое уравнение с помощью формул приведения приводим к виду :  
 $\sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = \sin 6x$ , а второе – к виду  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ .

Решим уравнение  $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{3}) = 1$ .

Разделим обе части уравнения на  $\operatorname{tg} 3x$ . Это допустимо, так как в данных условиях  $\operatorname{tg} 3x$  не может равняться нулю:

$$\operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}, \operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{ctg} 3x, \operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 3x).$$

На основании условия равенства тангенсов двух углов имеем:

$$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi n;$$

$$8x = \frac{x}{6} + \pi n; x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}; x = (6n + 1) \frac{\pi}{48}, n \in \mathbb{Z}.$$

При каждом значении  $x$  из этой совокупности каждая из частей уравнения  $\operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 3x)$  существует.

Уравнения  $\sin x = \sin y$  и  $\cos x = \cos y$  можно решать и с применением формул, заменив разность функций произведением.

## 7. Выделение полного квадрата в тригонометрических уравнениях.

Примеры:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x,$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \cos 2x,$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin 2x.$$

Данный метод можно применить для уравнений, содержащих следующие выражения:

$$\sin^4 x + \cos^4 x, \quad \cos^6 x \pm \sin^6 x, \quad \sin^8 x \pm \cos^8 x.$$

Преобразуем первое выражение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Преобразуем второе выражение:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) (\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \cos 2x \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x \right) = \cos 2x \left( 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right).$$

Можно упростить эти выражения и с помощью формул понижения степени.

**8. Уравнения вида  $f(\sin x + \cos x, \sin x \cos x) = 0$ ,  $f(\sin x - \cos x, \sin x \cos x) = 0$ .**

Решить такие уравнения можно заменой  $\sin x + \cos x = t$  или  $\sin x - \cos x = t$ .

Примеры:

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x,$$

$$6 \sin x \cos x + 2 \sin x = 2 + 2 \cos x,$$

$$3 \sin 3x = 1 + 3 \cos 3x - \sin 6x.$$

После преобразования и соответствующей замены эти уравнения сводятся к квадратным. В первом уравнении, сделав замену  $\sin x + \cos x = t$ , получим

$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$ ,  $1 + \sin 2x = t^2$ ,  $\sin 2x = 1 - t^2$ . Уравнение примет вид  $t = 1 + 1 - t^2$ .

### Заключение

Методы решения тригонометрических уравнений играют ключевую роль в математике, позволяя находить значения переменных, удовлетворяющих заданным условиям.

Применение тригонометрических тождеств, замена переменных и графический анализ обеспечивают эффективный и системный подход к решению таких уравнений. Владение этими методами не только облегчает



решение задач, но и расширяет возможности применения тригонометрии в различных научных и инженерных дисциплинах.

Таким образом, изучение и совершенствование методов решения тригонометрических уравнений остаётся актуальной и важной задачей.

### **Использованные источники:**

1. Абрамов С. М., Морозов Ю. А. Тригонометрия и её приложения. — Москва: Просвещение, 2021. — 256 с.
2. Иванова Е. В. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. — Санкт-Петербург: Питер, 2022. — 184 с.
3. Петров А. Н. Современные подходы к решению тригонометрических уравнений. // Вестник математического образования. — 2023. — №3. — С. 45-52.
4. Козлов Д. В. Практикум по тригонометрии: теория и задачи. — Екатеринбург: УрФУ, 2020. — 320 с.
5. Российская электронная библиотека учебников и методической литературы. Электронный ресурс: <https://elibrary.ru> — материалы по тригонометрии, 2019–2024 гг.