**УДК 004.02**

**Автор:**

**Шарапова М.С.,**

4 курс, группа ВМ-Мат-4-1

ФГБОУ во «АГПУ»,

г. Армавир, Россия

[margaritasarapova563@gmail.com](mailto:margaritasarapova563@gmail.com), +7-964-914-62-45

**Научный руководитель:**

**Шкрябко Н.А.,**

преподаватель кафедры математики и естественно-научных дисциплин

ФГБОУ во «АГПУ»,

г. Армавир, Россия

**РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ**

***Аннотация:*** *в статье рассматривается понятие равносильности уравнений и неравенств, ключевое для правильного и эффективного решения математических задач. Описываются основные равносильные преобразования, которые позволяют сохранять множество решений при упрощении выражений. Приводятся примеры применения этих методов, а также обсуждаются типичные ошибки при работе с уравнениями и неравенствами. Материал будет полезен для учащихся и преподавателей, стремящихся углубить понимание алгоритмов решения.*

***Ключевые слова:*** *равносильность уравнений, равносильность неравенств, преобразования уравнений, решение уравнений, решение неравенств, математические методы, множество решений, эквивалентные выражения*

***Abstract:*** *This article examines the concept of equivalence of equations and inequalities, which is key to the correct and effective solution of mathematical problems. It describes the basic equivalent transformations that allow multiple solutions to be preserved when simplifying expressions. Examples of the application of these methods are provided, and common mistakes when working with equations and inequalities are discussed. This material will be useful for students and teachers seeking to deepen their understanding of solution algorithms.*

***Keywords:*** *equivalence of equations, equivalence of inequalities, transformations of equations, solution of equations,* solution *of inequalities, mathematical methods, set of solutions, equivalent expressions.*

**Введение**

Понятие равносильности уравнений и неравенств играет ключевую роль в решении математических задач. Равносильные уравнения или неравенства — это такие выражения, которые имеют одинаковое множество решений. Осознание и применение равносильных преобразований позволяет не только упростить задачу, но и гарантирует, что полученный результат будет корректным и полным. Важность данного понятия проявляется при решении сложных уравнений и неравенств, где необходимо сохранять эквивалентность на каждом шаге преобразований. В статье будет рассмотрено, какие преобразования сохраняют равносильность, а также приведены примеры их применения, что поможет более глубоко понять процесс решения и избежать типичных ошибок.

**Понятие о равносильности уравнений и неравенств**

*Определение.* Равенство с переменной называется уравнением.

В общем виде уравнение понимается как аналитическая запись задачи о разыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны.

Общий вид уравнения с одной переменной *х*

*f(x) = g(x)*

Корнем (или решением) уравнения называется значение переменной, превращающее уравнение в верное числовое равенство.

*Определение.* Если два выражения с переменной соединить одним из знаков: > (больше), < (меньше), >= (больше или равно), <= (меньше или равно), то получим неравенство с переменной.

Общий вид неравенства с одной переменной *х* (например, для случая

«больше»):

*f(x)>g(x)*

Решением неравенства называется значение переменной, превращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

Таким образом, решить уравнение (неравенство) – значит найти все его корни (решения) или показать, что их нет.

*Определение.* Областью допустимых значений (ОДЗ, или областью определения) уравнения или неравенства называется общая область определения для функций *f(x)* и *g(x)*, стоящих в левой и правой частях уравнения или неравенства.

*Определение.* Два уравнения (неравенства) называются *равносильными*(или эквивалентными) на некотором множестве (обычно на ОДЗ исходного уравнения или неравенства), если на этом множестве они имеют одни и те же решения, т.е. каждое решение первого уравнения (неравенства) является решением второго и, наоборот, каждое решение второго – является решением первого.

Некоторые теоремы о равносильности

|  |  |
| --- | --- |
| Уравнения | Неравенства |
| 1. Если из одной части уравнения (или неравенства) перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение (или неравенство), равносильное заданному (на любом множестве) | |
| 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, имеющую смысл и не равную нулю на ОДЗ исходного уравнения), то получим уравнение, равносильное исходному (на ОДЗ исходного) | 2а. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одну и ту же функцию, имеющую смысл и положительную на ОДЗ исходного неравенства), то получим неравенство, равносильное исходному (на ОДЗ исходного)  2б. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, имеющую смысл и отрицательную на ОДЗ исходного неравенства) и, кроме того, поменять знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное исходному (на ОДЗ исходного) |
| 3. Если от обеих частей уравнения *f(x)=g(x)* взять возрастающую (или убывающую) функцию *u* и при этом не происходит сужения ОДЗ исходного уравнения, то полученное уравнение  *f* (*x*)  (*g*(*x*)) будет равносильно исходному (на ОДЗ исходного). | 3а. Если от обеих частей неравенства *f(x)>g(x)*взять возрастающую функцию *u*(сохранив знак неравенства) и при этом не происходит сужения ОДЗ исходного неравенства, то полученное неравенство  *f* (*x*)  (*g*(*x*)) будет равносильно исходному (на ОДЗ исходного).  3б. Если от обеих частей неравенства *f(x) <g(x)*взять убывающую функцию *u*, поменяв знак неравенства на противоположный, и при этом не происходит сужения ОДЗ исходного неравенства, то полученное неравенство  *f* (*x*)  (*g*(*x*)) будет равносильно исходному (на ОДЗ исходного). |

**Понятие о равносильности систем уравнений**

Если ставится задача найти все общие решения двух (или больше) уравнений или неравенств с одной или несколькими переменными, то говорят, что надо решить систему уравнений или неравенств.

*Определение.*Решением системы называется такое значение переменной или такой упорядоченный набор значений переменных (если переменных несколько), которые удовлетворяют сразу всем уравнениям (неравенствам) системы, т.е. решением системы двух или больше уравнений (или неравенств) с *n* неизвестными называется такое упорядоченное множество из *n* чисел, при подстановке которых в систему вместо неизвестных все уравнения (или неравенства) превращаются в верные числовые равенства (или неравенства).

Решить систему уравнений или неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Если система не имеет решения, то ее называют несовместной.

*Определение.* Две системы уравнений (или неравенств) называются равносильными на некотором множестве, если они на этом множестве имеют одинаковые решения, т.е. каждое решение первой системы на этом множестве является решением второй и обратно, каждое решение второй является решением первой.

Как и для уравнений, все равносильные преобразования систем выполняются на ОДЗ исходной системы.

ОДЗ (областью допустимых значений) системы называется общая область определения для всех функций, которые входят в запись этой системы.

Основные утверждения о равносильности систем (свойства равносильности систем)

1. Если изменить порядок уравнений (или неравенств) заданной системы, то получим систему, равносильную заданной.
2. Если одно из уравнений (или неравенств) системы заменить на равносильное ему уравнение (или неравенство), то получим систему,

равносильную заданной.

1. Если в системе уравнений из одного уравнения выразить одну переменную, например *х* через другие и полученное выражение подставить вместо х во все остальные уравнения системы, то получим систем, равносильную заданной.
2. Если первое уравнение системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число   0, и второго уравнения, умноженного на число   0 (а все остальные уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную заданной.

**Заключение**

Равносильность уравнений и неравенств играет фундаментальную роль в их решении, обеспечивая сохранение множества решений при проведении преобразований. Владение методами равносильных преобразований позволяет значительно упростить задачи, повысить точность и избежать ошибок. При этом важно понимать условия, при которых преобразования сохраняют равносильность, чтобы не потерять или не добавить лишние корни. Осознание и применение принципов равносильности способствует развитию математического мышления и повышению эффективности учебного и практического процесса.

**Использованные источники**

1. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 4-е изд. – М.: Мнемозина, 2003.
2. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2002.
3. Алгебра и начала математического анализ: учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.] – 7-е изд., с испр. – М.: Просвещение, 2008.
4. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. –7-е изд., стер. – М с.: Издательский центр «Академия», 2020. – 256с.
5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни – М.: Просвещение, 2018. – 431 с.: ил.